
MUKAVEMET I

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

– ders notu –

Yard. Doç. Dr. Erdem DAMCI

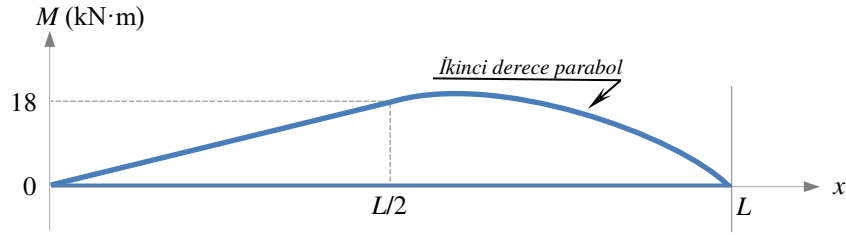
İstanbul Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü

© Tüm hakları saklıdır.

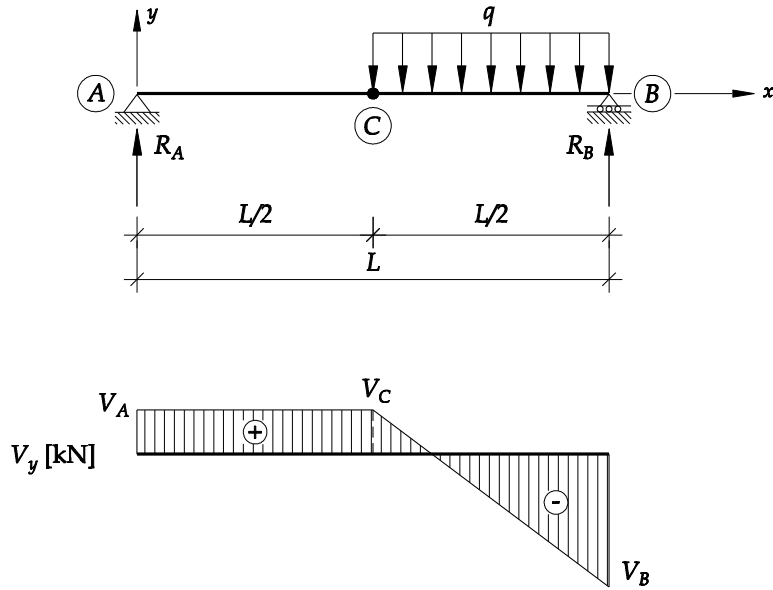
İzinsiz kısmen veya tamamen çoğaltılamaz veya kullanılamaz.

– Ocak 2016 –

Örnek 1. Üzerinde yalnızca yayılı yük bulunan ve açıklığı L olan bir basit kirişe ait eğilme momenti diyagramı aşağıda verilmiştir. Bu kirişe ait kesme kuvveti diyagramını ve yük dağılımını L cinsinden bulunuz.



Çözüm 1. Şekilde verilen moment diyagramında, kirişin $L/2$ noktasına kadar moment değişimi doğrusal iken, $L/2$ ve L arasında ikinci derecen bir parabol olarak verilmiştir. $V = dM/dx$ bağıntısından eğilme momentinin lineer olduğu kısımda kesme kuvveti sabit, ikinci derece parabol olduğu kısımda ise birinci dereceden bir denkleme sahip olacaktır. Benzer şekilde, $-q = dV/dx$ bağıntısından hareketle, kesme kuvvetinin birinci dereceden bir denklem olduğu kısımda da dış yük q sabit olarak elde edilecektir. Dolayısıyla,



$$V = \frac{dM}{dx} \quad \rightarrow \quad dM = V \cdot dx \quad \rightarrow \quad M_C - M_A = \int_0^{L/2} V dx$$

$0 \leq x \leq L/2$ aralığı için

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad M_A = 0$$

$$x = L/2 \quad \rightarrow \quad M_C = 18 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$18 - 0 = Vx \Big|_0^{L/2} \quad \rightarrow \quad 18 = V \left(\frac{L}{2} \right) - V(0)$$

$$\boxed{V_A = V_C = \frac{36}{L}}$$

$$-q = \frac{dV}{dx} \quad \rightarrow \quad dV = -q \cdot dx \quad \rightarrow \quad V_B - V_C = - \int_{L/2}^L q dx$$

$L/2 \leq x \leq L$ aralığı için

$$x = L/2 \quad \rightarrow \quad V_C = \frac{36}{L}$$

$$V_B - \frac{36}{L} = -qx \Big|_{L/2}^L \quad \rightarrow \quad V_B = -q(L) + q\left(\frac{L}{2}\right) + \frac{36}{L}$$

$$V_B = -\frac{qL}{2} + \frac{36}{L}$$

Sol mesnette, mesnet tepkisi kesme kuvvetine eşit olacağından, denge denklemleri yardımıyla mesnet tepkisi q cinsinden elde edilir.

$$\sum M_B = 0 \quad \rightarrow \quad R_A L = q \frac{L}{2} \frac{L}{4} \quad \rightarrow \quad R_A = \frac{qL}{8}$$

$$R_A = V_A \quad \rightarrow \quad \frac{qL}{8} = \frac{36}{L}$$

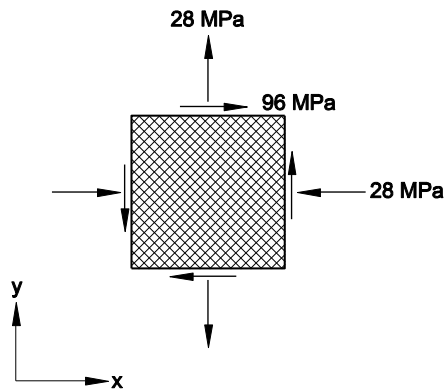
$$\boxed{q = \frac{288}{L^2}}$$

Yayıllı yük elde edildikten sonra sağ mesnetteki kesme kuvveti ve mesnet tepkisi hesaplanır.

$$V_B = -\frac{qL}{2} + \frac{36}{L} = -\frac{288L}{2L^2} + \frac{36}{L}$$

$$\boxed{V_B = -\frac{108}{L} \quad ; \quad R_B = \frac{108}{L}}$$

Örnek 2. Aşağıda bileşenleri verilen düzlem gerilme hali için



- Asal gerilmeleri hesap ederek doğrultularını bulunuz ve düzlem gerilme elemanı üzerinde gösteriniz.
- Normal gerilmenin sıfır olduğu doğrultuyu bulunuz.
- Normal gerilmenin kayma gerilmesine eşit olduğu doğrultuyu bulunuz.
- Bulduğunuz sonuçları Mohr diyagramı üzerinde gösteriniz.

Çözüm 2. Şekilde verilen düzlem gerilme hali için gerilme bileşenleri:

$$\sigma_x = -28 \text{ MPa}; \sigma_y = +28 \text{ MPa}; \tau_{xy} = +96 \text{ MPa}$$

a) Asal gerilmeler ve doğrultuları:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{-28 + 28}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-28 - 28}{2}\right)^2 + 96^2} = \pm 100 \text{ MPa}$$

$$\boxed{\sigma_1 = -100 \text{ MPa}; \sigma_2 = +100 \text{ MPa}}$$

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{\tau_{xy}}{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)} = \frac{96}{\left(\frac{-28 - 28}{2}\right)} = -3,42857 \rightarrow 2\varphi_0 = -73,74^\circ$$

$$\boxed{\varphi_0 = -36,87^\circ} \rightarrow x_0 = -36,87^\circ; y_0 = 53,13^\circ$$

b) Normal gerilmenin sıfır olduğu doğrultu:

$$\sigma = 0 \rightarrow \varphi_1 = ?$$

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi$$

Değerleri dönüşüm bağıntısında yerine koyar ve normal gerilmeyi sıfıra eşitleyerek aradığımız doğrultuyu elde edebiliriz.

$$-28 \cos^2 \varphi_1 + 28 \sin^2 \varphi_1 + 96 \sin(2\varphi_1) = 0$$

$$96 \sin(2\varphi_1) = 28(\cos^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_1)$$

$$96 \sin(2\varphi_1) = 28 \cos(2\varphi_1)$$

$$\sin(2\varphi_1) / \cos(2\varphi_1) = 28 / 96$$

$$\tan(2\varphi_1) = 0,291667 \rightarrow 2\varphi_1 = 16,26^\circ \rightarrow \boxed{\varphi_1 = 8,13^\circ}$$

c) Normal gerilmenin kayma gerilmesine eşit olduğu doğrultu:

$$\sigma = \tau \rightarrow \varphi_2 = ?$$

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\tau = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

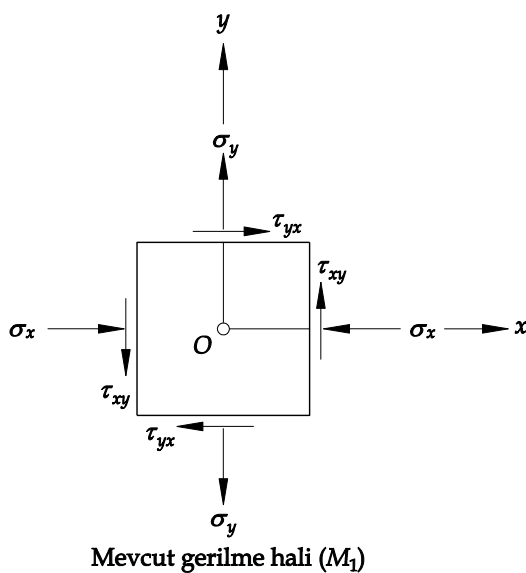
Normal gerilme ve kayma gerilmesi için verilen dönüşüm bağıntılarını birbirine eşitleyerek aradığımız doğrultuyu elde edebiliriz.

$$-28 \cos^2 \varphi_2 + 28 \sin^2 \varphi_2 + 96 \sin(2\varphi_2) = 28 \sin(2\varphi_2) + 96 \cos(2\varphi_2)$$

$$96 \sin(2\varphi_2) - 28 \sin(2\varphi_2) = 96 \cos(2\varphi_2) + 28(\cos^2 \varphi_2 - \sin^2 \varphi_2)$$

$$68 \sin(2\varphi_2) = 124 \cos(2\varphi_2)$$

$$\tan(2\varphi_2) = 1,823529 \rightarrow 2\varphi_2 = 61,26^\circ \rightarrow \boxed{\varphi_2 = 30,63^\circ}$$



Görüleceği üzere normal gerilmenin kayma gerilmesine eşit olduğu doğrultu, Mohr dairesi üzerinde $2\varphi_2=61,26^\circ$ 'lik dönüş ile elde edilmektedir. Normal gerilme ve kayma gerilmesinin birbirine eşit şiddette ve pozitif olması hali için düzlem gerilme elemanında ise mevcut durumdan $30,63^\circ$ 'lik bir dönüş yapılması gerekir. Burada gözden kaçırılmaması gereken nokta, kayma gerilmesine eşitlenen gerilme bileşeninin, σ_x normal gerilme bileşeni olduğudur. x - y koordinat sisteminde σ_x 'in değeri negatifken, $30,63^\circ$ 'lik bir eksen transformasyonu ile σ_x normal gerilmesi pozitif olmaktadır. Şayet

normal gerilmenin yön değiştirmesi istenmeseydi, yani τ_{xy} kayma gerilmesi ile σ_x normal gerilmesinin yalnız şiddetçe birbirine eşit olması istenseydi; kayma gerilmesi (+) normal gerilme de yön değiştirmeyecek şekilde (-) alınarak hesap yapıldığında,

$$-\sigma = \tau \rightarrow \varphi_3 = ?$$

$$28 \cos^2 \varphi_3 - 28 \sin^2 \varphi_3 - 96 \sin(2\varphi_3) = 28 \sin(2\varphi_3) + 96 \cos(2\varphi_3)$$

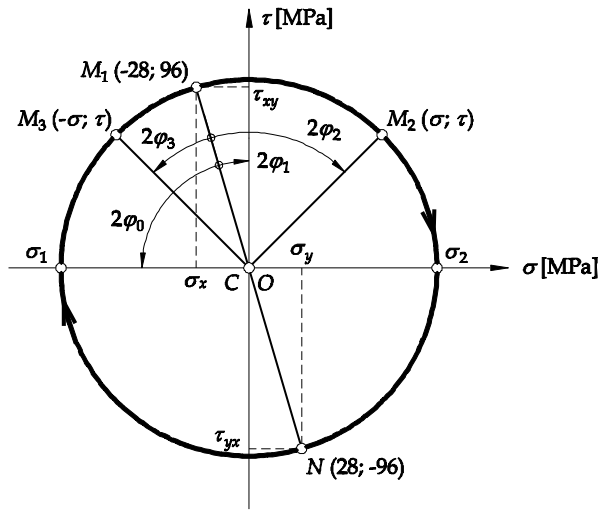
$$-96 \sin(2\varphi_3) - 28 \sin(2\varphi_3) = 96 \cos(2\varphi_3) - 28(\cos^2 \varphi_3 - \sin^2 \varphi_3)$$

$$-124 \sin(2\varphi_3) = 68 \cos(2\varphi_3)$$

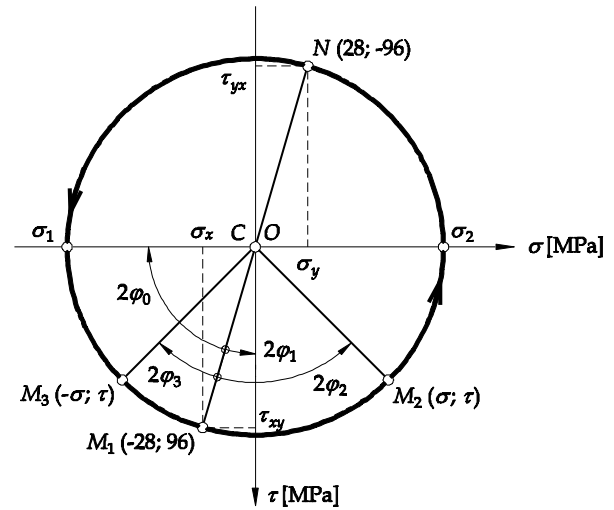
$$\tan(2\varphi_3) = -0,548387 \rightarrow 2\varphi_3 = -28,74^\circ \rightarrow \boxed{\varphi_3 = -14,37^\circ}$$

değeri elde edilecektir. Bu gerilme hali için düzlem gerilme elemanında $-14,37^\circ$, Mohr dairesi üzerinde de $-28,74^\circ$ 'lik bir dönüş yapıldığında, σ_x normal gerilmesinin yönü değişmeden kayma gerilmesine şiddetçe eşitlenmiş olur. Sonuçlar Mohr dairesi üzerinden incelendiğinde konu daha iyi anlaşılacaktır.

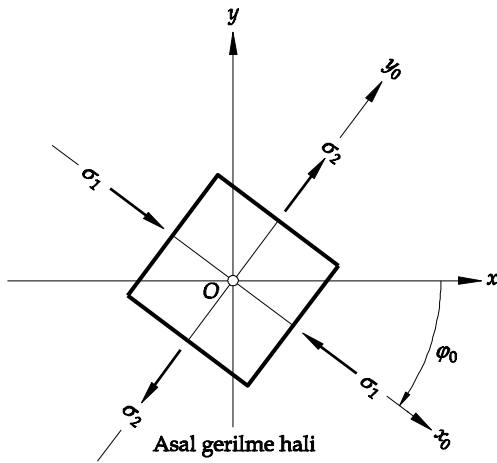
d) Mohr Dairesinin çizimi:



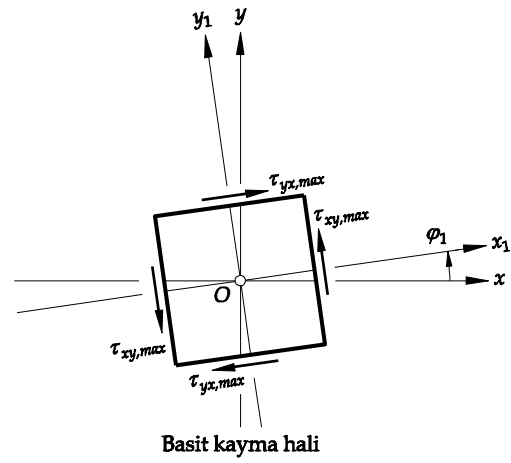
Pozitif kayma gerilmesi eksenini
yukarı yönde alınarak çizilen
Mohr Dairesi



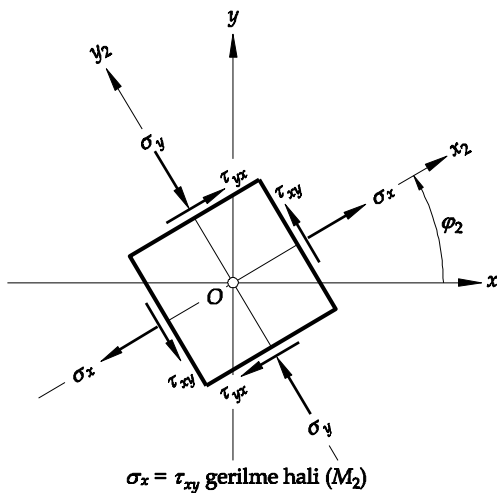
Pozitif kayma gerilmesi eksenini
aşağı yönde alınarak çizilen
Mohr Dairesi



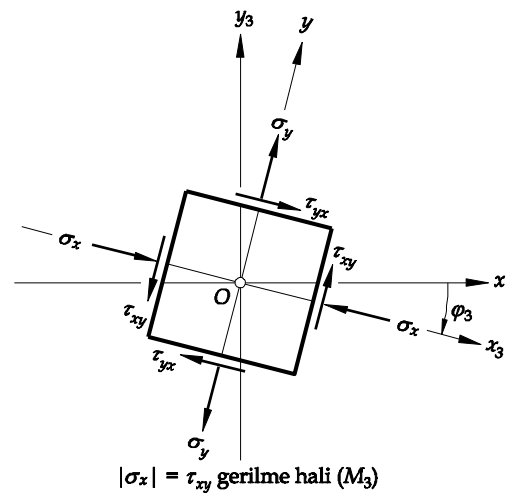
Asal gerilme hali



Basit kayma hali



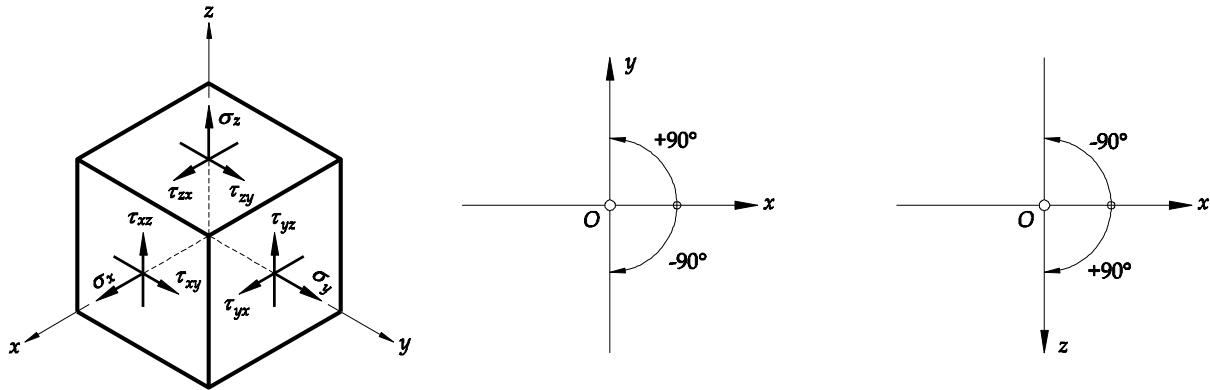
$\sigma_x = \tau_{xy}$ gerilme hali (M_2)



$|\sigma_x| = \tau_{xy}$ gerilme hali (M_3)

Alternatif kısa çözüm:

Soruyu daha hızlı ve kolay çözebilmek için mevcut gerilme haline ait Mohr dairesinin çizilerek hesaba gidilmesi gerekir. Daire üzerinde M_1 noktası işaretlendikten sonra bulunması istenen doğrultu daha pratik bir şekilde elde edilebilir. Dikkat edilmesi gereken husus, gerilme düzlemi ile Mohr dairesinin dönüş yönleridir. Mohr dairesi üzerinde kayma gerilmesi için seçilecek pozitif eksen yönü, gerilme elemanı için hesaplanacak açıların işaretini etkileyecektir. Düzlem gerilme elemanında, verilen x - y eksen takımına göre elemanı saat yönünün tersi istikamette çeviren τ_{xy} kayma gerilmeleri (+) kabul edilmektedir. Mohr çemberinde ise şayet, pozitif kayma gerilmesi eksenini yukarı doğru seçilmişse saat yönü istikametinde yapılacak dönüşler (+) olacaktır. Diğer bir ifadeyle, dönüşüm denklemleri ile elde edilen ve asal doğrultuyu veren açının (+) olması halinde, asal gerilmeleri gösteren gerilme hali için eksen transformasyonu, düzlem gerilme elemanında saat yönünün tersi, Mohr dairesi üzerinde ise saat yönünde olacaktır. Dairede, kayma gerilmesini ifade eden eksenin aşağı doğru pozitif seçilmesi halinde ise dönüş yönü saat yönünün tersi istikamette olacağından gerilme düzlemi ile çemberdeki dönüş yönleri birbirine eşit olacaktır. Pozitif dönüş yönlerinin durumu, seçilecek pozitif kayma eksenin yönüne göre Mohr dairesinde değişmezken, elemanter dörtgende seçilecek eksen takımına göre, gerilme düzlemindeki dönüş yönleri farklılık gösterecektir. Sorunun 'd' maddesinde iki farklı çizim yöntemi için de Mohr dairesi gösterilmiştir.

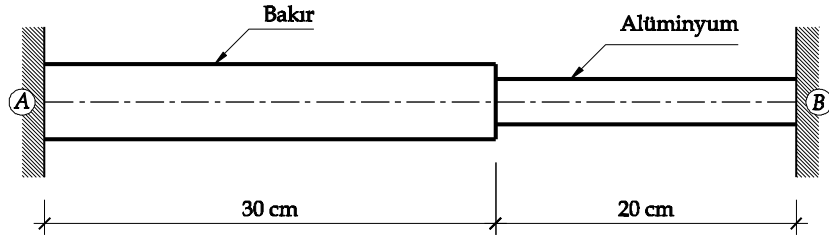


Düzlem gerilme elemanında kullanılan kartezyen eksenlerin değişmesi halinde ise dönüşüm denklemlerinin çıkartıldığı referans eksen (genellikle yatay eksendir) dikkate alınarak, dik eksenlerin pozitif bölgesinde kalan ve referans eksene dik pozitif kayma gerilmesine göre dönüş yönünün belirlenmesi gerekir.

--- O ---

Örnek 3. Bileşik bir çubuk iki rijit mesnet arasına yerleştirilmiştir. Çubuğun sol kısmı bakır olup kesit alanı 60 cm^2 , sağ kısmı da alüminyum olup kesit alanı 40 cm^2 'dir. Sistem 27°C 'de gerilmesizdir. Alüminyum kısımdaki gerilmelerin 160 MPa 'lı geçmeyecek şekilde, sistemin sıcaklığını düşürebileceğimiz uç değeri bulunuz (Çubuk ağırlığını ihmal ediniz) (Nash, 1972).

Bakır için : $E_{\text{bakır}} = 1,12 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$, $\alpha_t = 1,698 \times 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$
 Alüminyum için : $E_{\text{alüminyum}} = 0,70 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$, $\alpha_t = 2,380 \times 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$



Çözüm 3. Sistem üçüncü dereceden hiperstatiktir. Sıcaklık farkından dolayı çubukta kesme kuvveti ve eğilme momenti oluşmayacaktır. Ayrıca çubuk ağırlığı da ihmal edildiğinden bileşik çubuk yalnız eksenel normal kuvvete maruz kalacaktır. Dolayısıyla sistem birinci dereceden hiperstatik kabul edilebilir. Problemi çözebilmek için bir adet geometrik uygunluk şartına ihtiyacımız vardır. Sıcaklık değişiminden sonra çubuktaki toplam boy değişiminin sıfır olması gereğinden hareketle, uygunluk şartı:

$$\Delta l_{\text{bakır}} + \Delta l_{\text{alüminyum}} = 0$$

olacaktır. Dolayısıyla,

$$\Delta l_{\text{bakır}} = \alpha_{t,\text{bakır}} \Delta t l_{\text{bakır}} + \frac{N l_{\text{bakır}}}{(EA)_{\text{bakır}}} = (1,698 \times 10^{-5} \times \Delta t \times 300) + \frac{N \times 300}{1,12 \times 10^5 \times 6000}$$

$$\Delta l_{\text{bakır}} = (509,40 \times 10^{-5} \times \Delta t) + (4,46 \times 10^{-7} \times N)$$

$$\Delta l_{\text{alüminyum}} = \alpha_{t,\text{alüminyum}} \Delta t l_{\text{alüminyum}} + \frac{N l_{\text{alüminyum}}}{(EA)_{\text{alüminyum}}} = (2,38 \times 10^{-5} \times \Delta t \times 200) + \frac{N \times 200}{0,7 \times 10^5 \times 4000}$$

$$\Delta l_{\text{alüminyum}} = (476,00 \times 10^{-5} \times \Delta t) + (7,14 \times 10^{-7} \times N)$$

olarak elde edilir. İki parçalı çubukta sıcaklığın düşmesine bağlı olarak eksenel çekme kuvveti meydana gelecektir. Alüminyumda meydana gelen gerilmelerin 160 MPa 'lı geçmemesi için sistemin eksenel kuvvetinin maksimum,

$$N_{\text{maks}} = \sigma_{\text{alüminyum}} A_{\text{alüminyum}} = 160 \times 4000 = 640000 \text{ N}$$

değerine eşit olması gerekir. Bulduğumuz eksenel kuvveti yukarıdaki denklemlerde yerine koyar ve geometrik uygunluk şartımızı yazarsak,

$$\begin{aligned}
 & \left[(509,40 \times 10^{-5} \times \Delta t) + (4,46 \times 10^{-7} \times 640 \times 10^3) \right] + \left[(476 \times 10^{-5} \times \Delta t) + (7,14 \times 10^{-7} \times 640 \times 10^3) \right] = 0 \\
 & (509,40 \times 10^{-5} \times \Delta t) + (476 \times 10^{-5} \times \Delta t) = -2854,40 \times 10^{-4} - 4569,60 \times 10^{-4} \\
 & 985,40 \times 10^{-5} \times \Delta t = -7424,00 \times 10^{-4} \\
 & \Delta t = -75,34^\circ\text{C}
 \end{aligned}$$

değerini elde ederiz. Sistemin sıcaklığını düşürebileceğimiz uç değer ise,

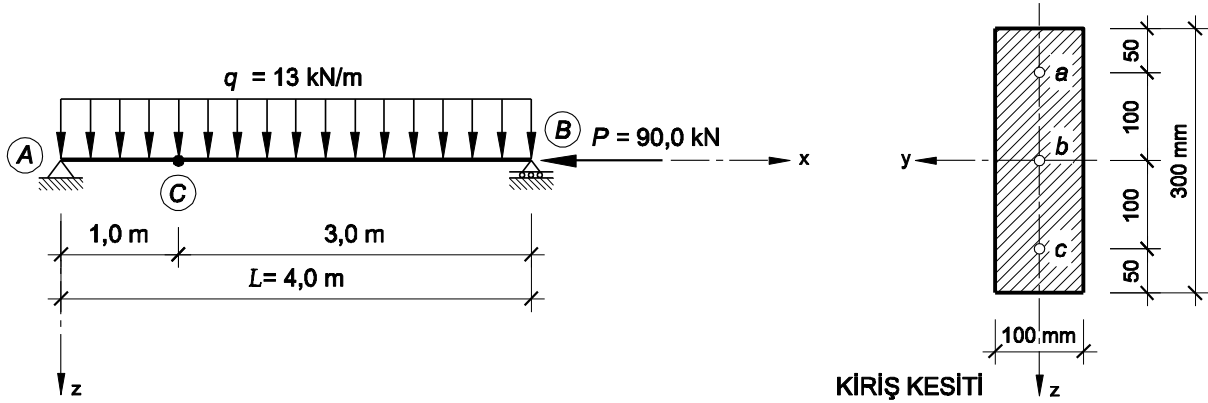
$$\Delta t = t - t_0 \quad \rightarrow \quad t - 27^\circ = -75,34^\circ \quad \rightarrow \quad \boxed{t = -48,34^\circ\text{C}}$$

olarak elde edilir.

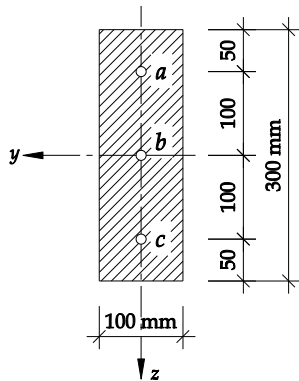
---- 0 ----

Örnek 4. Dikdörtgen kesitli bir basit kiriş aşağıda gösterildiği gibi yüklenmiştir. Kirişi oluşturan malzemede izin verilen en büyük çekme gerilmesi $\sigma_{\text{ç,em}} = 15 \text{ MPa}$, en büyük basınç gerilmesi $\sigma_{\text{b,em}} = 25 \text{ MPa}$, ve kayma gerilmesi de $\tau_{\text{em}} = 8 \text{ MPa}$ olduğuna göre,

- Kirişte maksimum iç kuvvetlerin bulunduğu noktalarda meydana gelen gerilmeleri hesaplayınız ve izin verilen sınırlara göre yeterli mukavemette olup olmadığını tahkik ediniz.
- Kirişte C noktasındaki (kirişin açıklığının dörtte biri için) iç kuvvetleri dikkate alarak kiriş kesiti üzerinde verilen a , b ve c noktalarını da kapsayacak şekilde gerilmeleri hesaplayınız ve kesit düzlemindeki değişimlerini diyagram ile gösteriniz.
- b şıkında bulduğunuz sonuçları kullanarak asal gerilmeleri ve doğrultularını hesap ediniz ve düzlem gerilme elemanı ile Mohr dairesi üzerinde gösteriniz.
- Asal gerilmeleri dikkate alarak kesitin yeterli mukavemette olup olmadığını, *en büyük kayma gerilmesi hipotezi* ve *biçim değiştirme enerjisi hipotezi* ile tahkik ederek değerlendiriniz.



Çözüm 4. Kirişe ait kesit tesiri diyagramlarını ve kesit parametrelerini hesaplayarak gerilme tahkikinde dikkate alacağımız kritik noktaları belirlememiz gerekir.

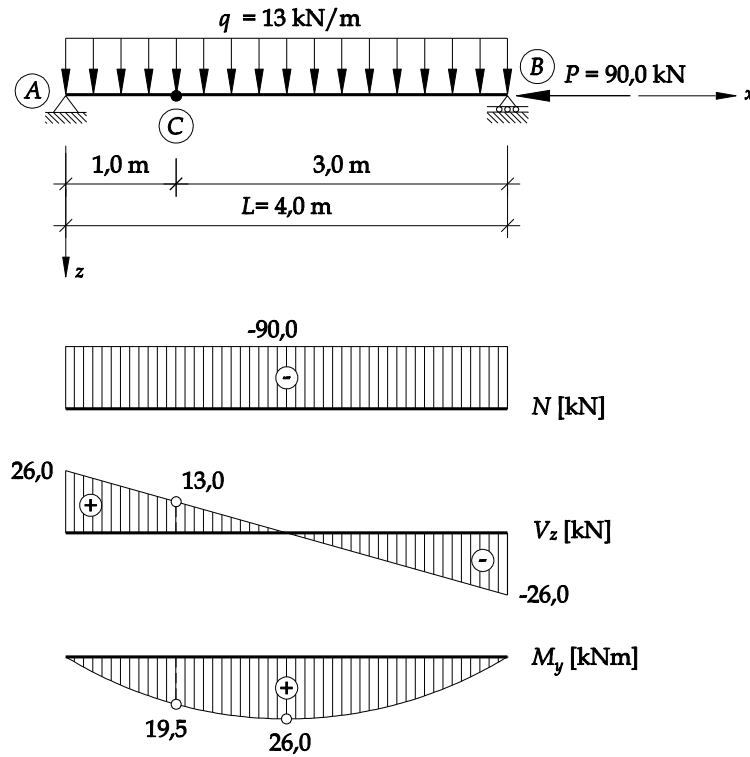


Kiriş kesitinde:

Kesit alanı : $A = 10 \times 30 = 300 \text{ cm}^2$

Atalet momenti : $I_y = \frac{10 \times 30^3}{12} = 22500 \text{ cm}^4$

Statik moment : $Q_{y,a} = 10 \times 5 \times 12,5 = 625 \text{ cm}^3$
 $Q_{y,G} = 10 \times 15 \times 7,5 = 1125 \text{ cm}^3$



a) Kirişte maksimum iç kuvvetlerin bulunduğu noktalarda gerilme tahkiki:

Kesit tesiri diyagramından görüleceği üzere, mesnetlerde kesme kuvveti, açıklıkta ise kesme kuvvetinin sıfır olduğu noktada eğilme momenti maksimum değerlerine ulaşmaktadır. Açıklık ortasında momentin maksimum olduğu noktada kesme kuvveti sıfır olduğu için kesitte kayma gerilmesi oluşmayacaktır. Dolayısıyla maksimum momentin bulunduğu noktada yalnızca normal gerilmelere göre tahkik yapılması yeterli olacaktır. Mesnetlerde ise kesme kuvvetinin maksimum olduğu noktalarda da eğilme momenti sıfırdır. Dolayısıyla bu noktalarda da eğilme momentinden dolayı kesitte normal gerilmeler meydana gelmeyecektir. Ancak gözden kaçırılmaması gereken nokta, kirişteki eksenel normal kuvvetin mevcudiyetidir. Eksenel normal kuvvet çubuk boyunca etkidiği ve sabit değerde kaldığı için yapılacak tüm tahkiklerde, normal gerilmelere etkisi göz önüne alınmalıdır. Mesnette kayma gerilmeleri için yapılacak tahkike ilave olarak normal gerilme tahkiki yapılması da gereklidir. Mesnet kesitinde kayma ve normal gerilmeler hesaplandıktan sonra bileşik mukavemet hali söz konusu olduğu için maksimum τ_{xz} kayma gerilmesinin bulunduğu ağırlık merkezinde asal gerilmelerin ve maksimum kayma gerilmesinin hesaplanarak izin verilen sınır gerilme değerlerinin aşıp aşılmadığı da kontrol edilmelidir.

A ve B mesnet kesitlerinde gerilme tahkiki:

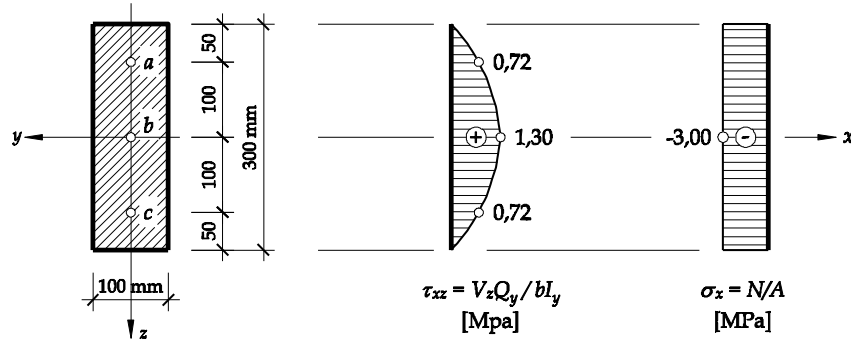
A mesnet noktasında giriş kesitinde meydana gelen gerilmeler,

$$N = -90,00 \text{ kN} ; V_z = +26,00 \text{ kN} ; M_y = 0$$

$$\tau_{xz,b} = \tau_{xz,\max} = \frac{V_z Q_{y,G}}{b I_y} = \frac{26 \times 10^3 \times 1125 \times 10^3}{100 \times 22500 \times 10^4} = 1,30 \text{ N/mm}^2 < \tau_{em} \text{ (Güvenli)}$$

$$\tau_{xz,a} = \tau_{xz,c} = \frac{V_z Q_{y,a}}{b I_y} = \frac{26 \times 10^3 \times 625 \times 10^3}{100 \times 22500 \times 10^4} = 0,72 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{x,\max} = \frac{N}{A} = \frac{-90 \times 10^3}{300 \times 10^2} = -3,00 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{b,em} \text{ (Güvenli)}$$



olarak elde edilir. Kesitin ağırlık merkezinde, eksenel normal kuvvet ve kesme kuvvetinden dolayı oluşan asal gerilmeler ve doğrultuları,

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{-3 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3 - 0}{2}\right)^2 + 1,3^2} = -1,5 \pm 1,99$$

$$\sigma_1 = -3,49 \text{ MPa} < \sigma_{b,em} \text{ (Güvenli)}$$

$$\sigma_2 = +0,49 \text{ MPa} < \sigma_{\epsilon,em} \text{ (Güvenli)}$$

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{\tau_{xz}}{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)} = \frac{1,3}{\left(\frac{-3}{2}\right)} = -0,86667 \rightarrow 2\varphi_0 = -40,91^\circ$$

$$\varphi_0 = -20,46^\circ \rightarrow x_0 = -20,46^\circ; y_0 = 69,54^\circ$$

Kesitin ağırlık merkezinde maksimum ve minimum kayma gerilmeleri ve doğrultusu,

$$\tau_{\max,\min} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{-3 - 0}{2}\right)^2 + 1,3^2} = \pm 1,99 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = +1,99 \text{ MPa} < \tau_{em} \text{ (Güvenli)}$$

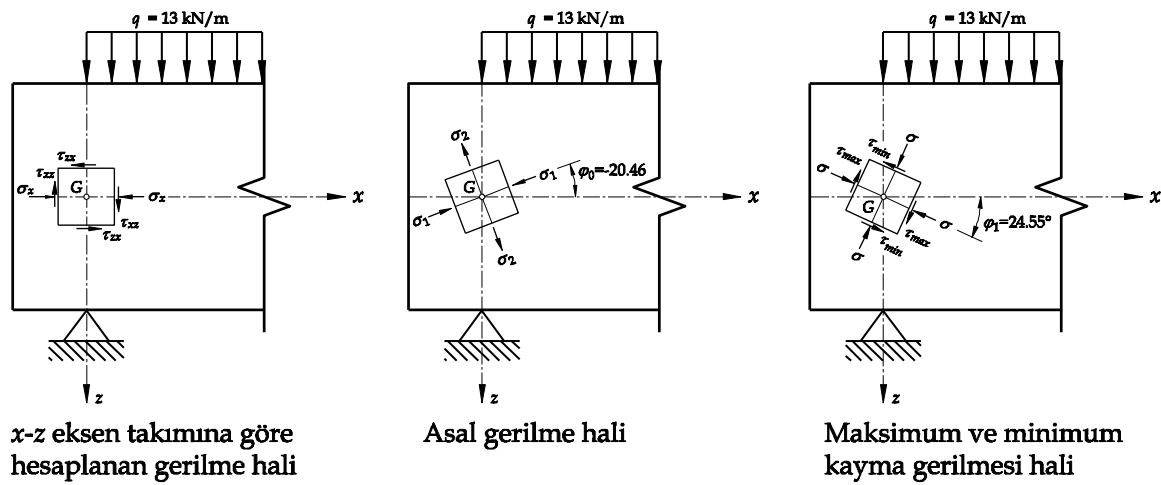
$$\tau_{\min} = -1,99 \text{ MPa} < \tau_{em} \text{ (Güvenli)}$$

Mohr dairesinden,

$$2\varphi_1 = 90^\circ - |2\varphi_0| = 49,09^\circ$$

$$\varphi_1 = 24,55^\circ$$

olarak hesaplanır. Görüleceği üzere kirişin mesnet kesitinde, x - z eksen takımı ve asal eksen takımına göre elde edilen gerilme değerleri izin verilen sınırlarının altında kalmaktadır. Kayma gerilmelerinin maksimum ve minimum olduğu doğrultuda da sınır değerler aşılmamaktadır. Mesnet kesitinde hesaplanan gerilmeler ve doğrultuları aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



B mesnedinde kesme kuvveti yön değiştireceğinden kesitte meydana gelen gerilmeler, $\tau_{xz, \max} = -1,30 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{x, \max} = -3,00 \text{ N/mm}^2$ olacaktır.

Kiriş açıklığında, kirişin orta noktasında gerilme tahkiki:

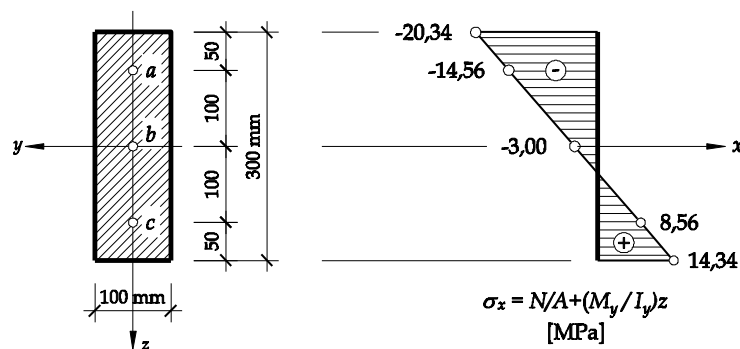
Açıklıkta, kirişin $L/2$ noktasında maksimum eğilme momentiyle birlikte aksenal normal kuvvet etkileyen kesitte meydana gelen gerilmeler,

$$N = -90,00 \text{ kN} ; V_z = 0 ; M_y = +26,00 \text{ kNm}$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z = \frac{-90 \times 10^3}{300 \times 10^2} + \frac{26 \times 10^6}{22500 \times 10^4} z = -3,00 + 0,1156 z$$

$$z_{\max} = +150 \text{ mm} \rightarrow \sigma_{x, \max} = -3,00 + 0,1156(+150) = +14,34 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{\epsilon, \text{em}} \text{ (Güvenli)}$$

$$z_{\min} = -150 \text{ mm} \rightarrow \sigma_{x, \min} = -3,00 + 0,1156(-150) = -20,34 \text{ N/mm}^2 > \sigma_{b, \text{em}} \text{ (Güvenli)}$$



şeklinde elde edilir. Kiriş açıklığının orta noktasında kesme kuvveti sıfır olduğu için kesit yalnız normal gerilme ile yüklü durumdadır. En dış liflerde meydana gelen gerilmeler maksimum ve minimum değerleri vermekte olup kayma gerilmesi bulunmadığı için bu gerilmeler aynı zamanda asal gerilmelerdir. Sonuç olarak; verilen yükler altında, kirişin orta noktasında, eğilmeden dolayı meydana gelen çekme ve basınç gerilmelerinde müsaade edilen sınırların aşılmadığı görülmektedir. Kiriş mevcut kesiti ile güvenlidir.

Hesaplanan değerlerden birinin emniyet gerilmelerinden daha büyük olması durumu söz konusu olsaydı, gerilmeleri azaltabilmek için kiriş kesitinin boyutlarının büyütülmesi, kirişe etkiyen yüklerin sınırlandırılması veya emniyet gerilmeleri daha yüksek bir malzeme seçimi çözüm yollarından biri olabilirdi.

b) C noktasında kiriş kesitinde meydana gelen gerilmeler ve diyagramları:

Kesit tesiri diyagramında C noktasında, eksenel normal kuvvet, kesme kuvveti ve eğilme momentinin oluşturduğu bileşik mukavemet hali söz konusudur.

$$N = -90,00 \text{ kN} ; V_z = +13,00 \text{ kN} ; M_y = +19,50 \text{ kNm}$$

$$\tau_{xz,a} = \tau_{xz,c} = \frac{V_z Q_{y,a}}{b I_y} = \frac{13 \times 10^3 \times 625 \times 10^3}{100 \times 22500 \times 10^4} = 0,36 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{xz,b} = \tau_{xz,\max} = \frac{V_z Q_{y,G}}{b I_y} = \frac{13 \times 10^3 \times 1125 \times 10^3}{100 \times 22500 \times 10^4} = 0,65 \text{ N/mm}^2 < \tau_{em} \text{ (Güvenli)}$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z = \frac{-90 \times 10^3}{300 \times 10^2} + \frac{19,50 \times 10^6}{22500 \times 10^4} z = -3,00 + 0,0867 z$$

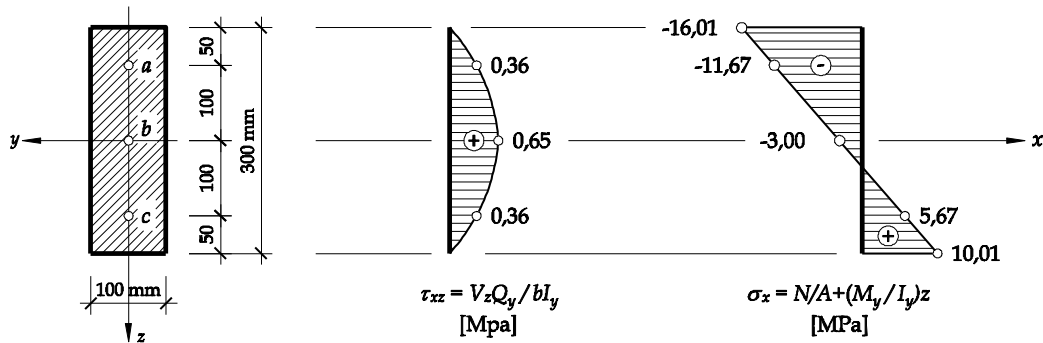
$$z_{\max} = +150 \text{ mm} \rightarrow \sigma_{x,\max} = -3,00 + 0,0867(+150) = +10,01 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{\zeta,em} \text{ (Güvenli)}$$

$$z_{\min} = -150 \text{ mm} \rightarrow \sigma_{x,\min} = -3,00 + 0,0867(-150) = -16,01 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{b,em} \text{ (Güvenli)}$$

$$z_a = -100 \text{ mm} \rightarrow \sigma_{x,\min} = -3,00 + 0,0867(-100) = -11,67 \text{ N/mm}^2$$

$$z_b = 0 \rightarrow \sigma_{x,\min} = -3,00 + 0,0867(0) = -3,00 \text{ N/mm}^2$$

$$z_c = +100 \text{ mm} \rightarrow \sigma_{x,\min} = -3,00 + 0,0867(+100) = +5,67 \text{ N/mm}^2$$

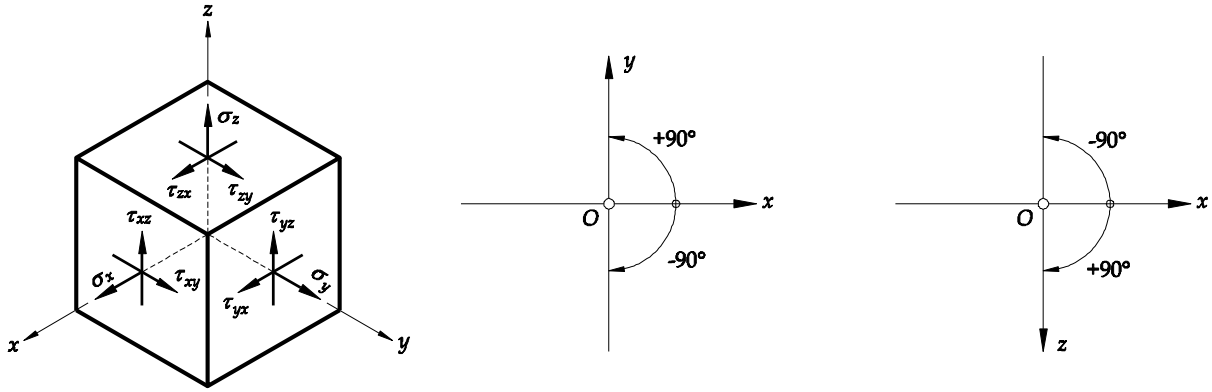


c) C kesitinde asal gerilmeler, doğrultuları ve Mohr dairesi üzerinde gösterimi:

Kiriş üzerinde C noktası için hesapladığımız gerilmeleri, düzlem gerilme elamanı üzerinde gösterebilmemiz için kiriş gövdesinin bulunduğu x-z düzlemini kullanmamız gerekir. Hesapta, kullanacağımız eksen takımına göre elemanter küp'teki gerilme bileşenlerinin pozitif yönleri dikkate alınmalıdır.

Kesitin en dış liflerinde yani z ekseninde $\pm 150 \text{ mm}$ için kayma gerilmesi sıfır olduğundan bu ordinatlardaki normal gerilme değerleri asal gerilmelerdir. Ancak

kesitin iç liflerine doğru ilerledikçe kayma gerilmesinin artması nedeniyle, x - z eksen takımına göre hesaplanan gerilme değerleri, maksimum ve minimum normal gerilmeleri ve kayma gerilmelerini ifade etmeyecektir. Dolayısıyla asal gerilmelerin ve doğrultularının bulunması gerekir. Kartezyen eksen takımının düzlemdeki konumuna göre, x yatay ekseninden dikey z eksenine (gerilme elemanında saat yönünde) yapılacak dönüşler (+) olacaktır. Mohr daireesinde kayma gerilmesi için pozitif yön de yukarı doğru seçildiği takdirde, elamanla Mohr dairesinin dönüş yönleri aynı olacaktır.



C kesitinde a noktasındaki asal gerilmeler ve doğrultuları:

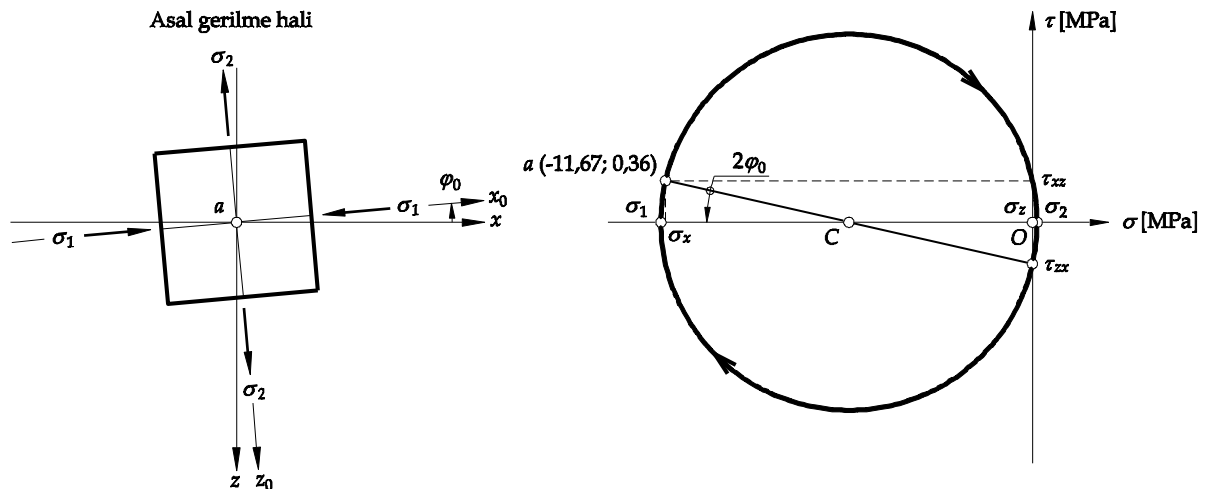
$$\sigma_x = -11,67 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_z = 0 \quad ; \quad \tau_{xz} = 0,36 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{-11,67}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-11,67}{2}\right)^2 + 0,36^2} = -5,835 \pm 5,846$$

$$\sigma_1 = -11,68 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_2 = +0,01 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{\tau_{xz}}{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)} = \frac{0,36}{\left(\frac{-11,67}{2}\right)} = -0,06170 \rightarrow 2\varphi_0 = -3,53^\circ$$

$$\varphi_0 = -1,77^\circ \rightarrow x_0 = -1,77^\circ; \quad y_0 = 88,23^\circ$$



C kesitinde b noktasındaki asal gerilmeler ve doğrultuları:

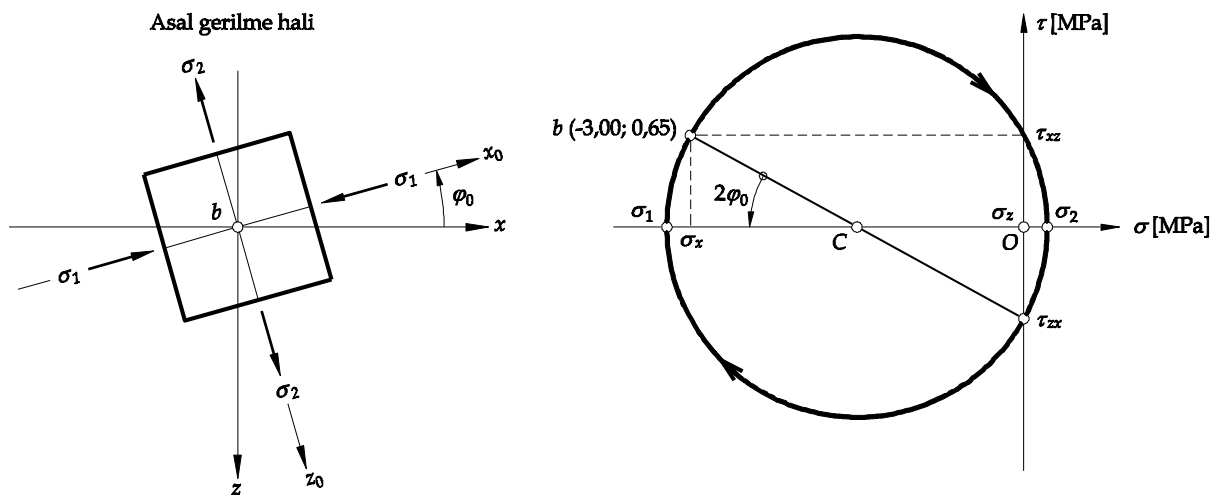
$$\sigma_x = -3,00 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_z = 0 \quad ; \quad \tau_{xz} = 0,65 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{-3,00}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3,00}{2}\right)^2 + 0,65^2} = -1,5 \pm 1,63$$

$$\sigma_1 = -3,13 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_2 = +0,13 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{\tau_{xz}}{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)} = \frac{0,65}{\left(\frac{-3,00}{2}\right)} = -0,43333 \rightarrow 2\varphi_0 = -23,43^\circ$$

$$\varphi_0 = -11,71^\circ \rightarrow x_0 = -11,71^\circ; y_0 = 78,29^\circ$$



C kesitinde c noktasındaki asal gerilmeler ve doğrultuları:

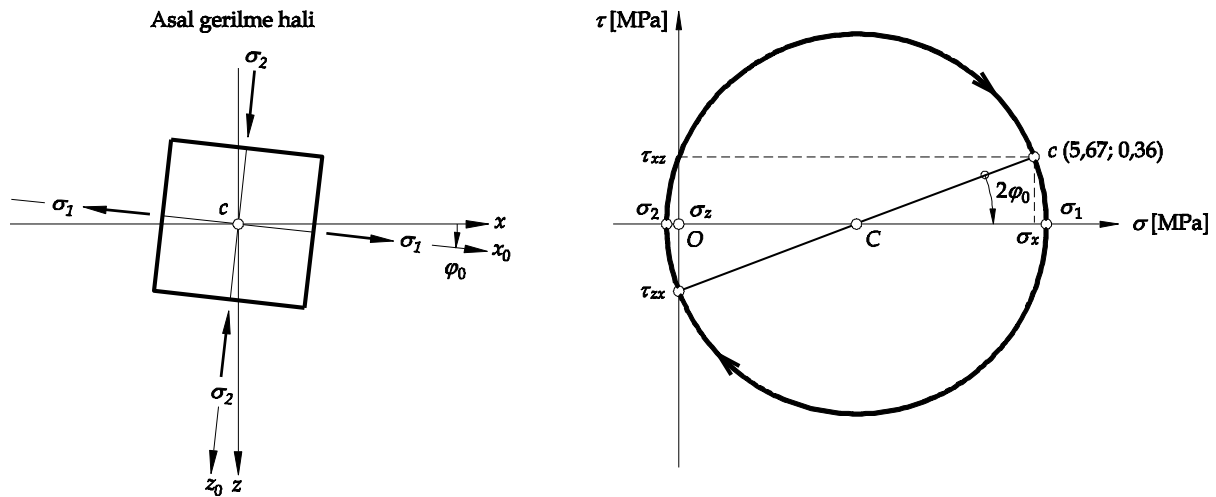
$$\sigma_x = +5,67 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_z = 0 \quad ; \quad \tau_{xz} = 0,36 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{5,67}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5,67}{2}\right)^2 + 0,36^2} = 2,835 \pm 2,858$$

$$\sigma_1 = +5,69 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_2 = -0,02 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{\tau_{xz}}{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)} = \frac{0,36}{\left(\frac{5,67}{2}\right)} = 0,12698 \rightarrow 2\varphi_0 = 7,24^\circ$$

$$\varphi_0 = 3,62^\circ \rightarrow x_0 = 3,62^\circ; y_0 = 93,62^\circ$$



d) Asal gerilmeler ile C kesitinde gerilme tahkiki:

a noktasında en büyük kayma gerilmesi hipotezi ile tahkik:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \stackrel{?}{\leq} \sigma_{em} \rightarrow |-11,68 - 0,01| = 11,69 \text{ MPa} \leq \sigma_{b,em} \text{ (Güvenli)}$$

a noktasında biçim değiştirme enerjisi hipotezi ile tahkik:

$$\begin{aligned} & (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sigma_1 \sigma_2 \stackrel{?}{\leq} \sigma_{em}^2 \\ & \sqrt{(-11,68)^2 + (0,01)^2 - (-11,68 \times 0,01)} = 11,69 \text{ MPa} \leq \sigma_{b,em} \text{ (Güvenli)} \end{aligned}$$

b noktasında en büyük kayma gerilmesi hipotezi ile tahkik:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \stackrel{?}{\leq} \sigma_{em} \rightarrow |-3,13 - 0,13| = 3,26 \text{ MPa} \leq \sigma_{b,em} \text{ (Güvenli)}$$

b noktasında biçim değiştirme enerjisi hipotezi ile tahkik:

$$\begin{aligned} & (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sigma_1 \sigma_2 \stackrel{?}{\leq} \sigma_{em}^2 \\ & \sqrt{(-3,13)^2 + (0,13)^2 - (-3,13 \times 0,13)} = 3,20 \text{ MPa} \leq \sigma_{b,em} \text{ (Güvenli)} \end{aligned}$$

c noktasında en büyük kayma gerilmesi hipotezi ile tahkik:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \stackrel{?}{\leq} \sigma_{em} \rightarrow |5,69 - (-0,02)| = 5,71 \text{ MPa} \leq \sigma_{\zeta,em} \text{ (Güvenli)}$$

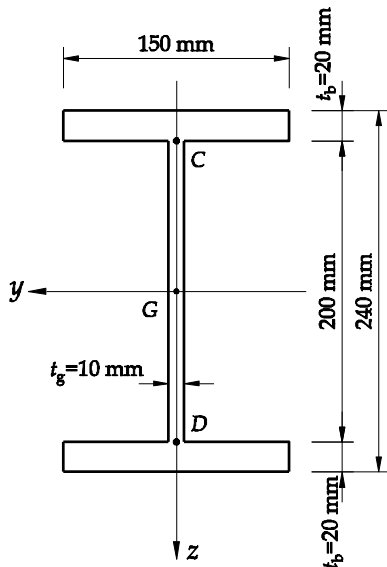
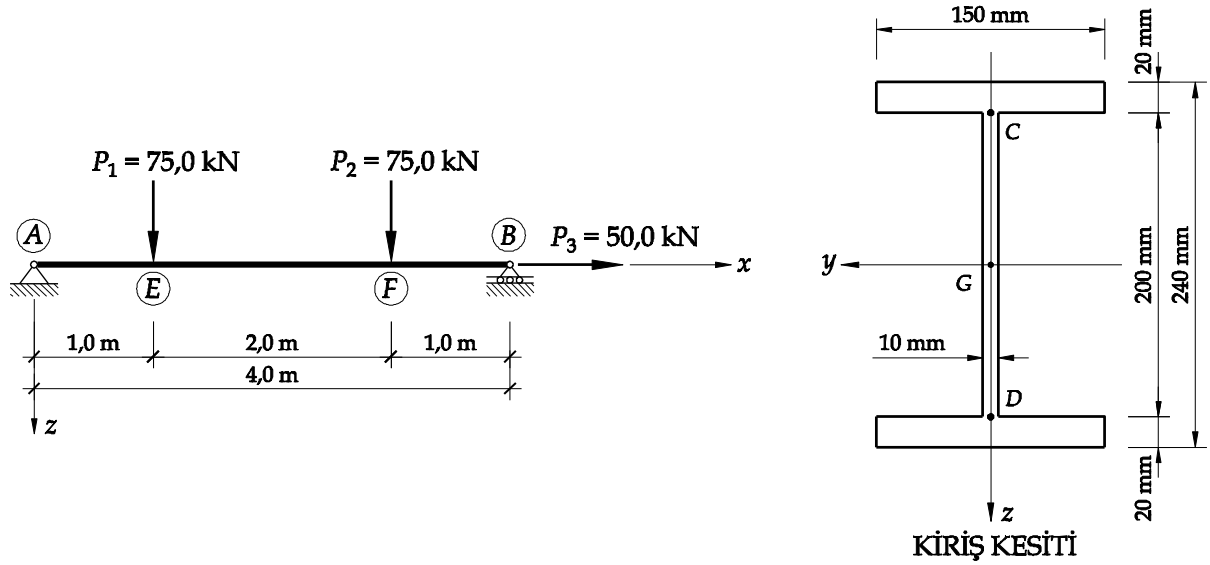
c noktasında biçim değiştirme enerjisi hipotezi ile tahkik:

$$\begin{aligned} & (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sigma_1 \sigma_2 \stackrel{?}{\leq} \sigma_{em}^2 \\ & \sqrt{(5,69)^2 + (-0,02)^2 - (5,69 \times (-0,02))} = 5,70 \text{ MPa} \leq \sigma_{\zeta,em} \text{ (Güvenli)} \end{aligned}$$

---- O ----

Örnek 5. Aşağıda yükleme durumu verilen "I" kesitli basit kirişte, $\sigma_{em} = 140 \text{ MPa}$ ve $\tau_{em} = 80 \text{ MPa}$ olduğuna göre,

- Kiriş kesitinde meydana gelen yatay ve düşey kayma gerilmelerini hesaplayınız, kesit düzlemindeki değişimini diyagram ile gösteriniz.
- Kiriş kesitinde meydana gelen normal gerilmeleri (C ve D noktaları için de) hesaplayınız ve kesit düzlemindeki değişimini diyagram ile gösteriniz.
- "I" kesitli kirişin boyun bölgesinde (C ve D noktalarında) meydana gelen maksimum gerilmeleri, y eksenine dik düzlem gerilme elemanı ve Mohr dairesi üzerinde gösteriniz.
- Kesitin yeterli mukavemette olup olmadığını, *en büyük kayma gerilmesi hipotezi* ve *biçim değiştirme enerjisi hipotezi* ile tahkik ederek değerlendiriniz.



Çözüm 5. Kirişe ait kesit tesiri diyagramlarını ve kesit parametrelerini hesaplayarak gerilme tahkikinde dikkate alacağımız kritik noktaları belirlememiz gerekir.

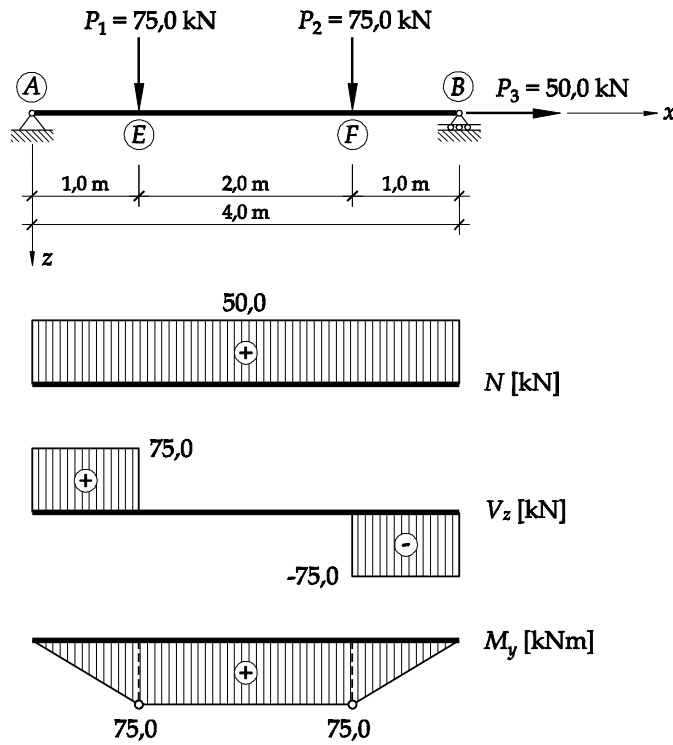
Kiriş kesiti için:

Kesit alanı : $A_k = 2(15 \times 2) + (1 \times 20) = 80 \text{ cm}^2$

Atalet momenti : $I_y = 2 \left(\frac{15 \times 2^3}{12} + 2 \times 15 \times 11^2 \right) + \frac{1 \times 20^3}{12}$
 $I_y = 7946,67 \text{ cm}^4$

Statik moment : $Q_{y, \text{başlık}} = 15 \times 2 \times 11 = 330,00 \text{ cm}^3$

$Q_{y, G} = Q_{y, \text{başlık}} + (10 \times 1 \times 5) = 380,00 \text{ cm}^3$



Görüleceği üzere kiriş eksenini üzerinde tekil yüklerin bulunduğu E ve F noktalarında kesme kuvvetiyle birlikte eğilme momenti de maksimum değerlerine ulaşmaktadır. Dolayısıyla yapacağımız gerilme tahkiklerinde hem kayma gerilmelerinin hem de normal gerilmelerin bir arada bulunması halini bu noktalar için göz önüne almamız gerekecektir. Ancak gözden kaçırılmaması gereken nokta, kirişteki eksenel normal kuvvetin varlığıdır. Eksenel normal kuvvet çubuk boyunca etkidiği ve sabit değerde kaldığı için yapılacak tüm tahkiklerde, normal gerilmelere etkisi göz önüne alınmalıdır. Mesnette kayma gerilmeleri için yapılacak tahkike ilave olarak normal gerilme tahkiki yapılması da gereklidir. Mesnet kesitinde kayma ve normal gerilmeler hesaplandıktan sonra bileşik mukavemet hali söz konusu olduğu için maksimum τ_{xz} kayma gerilmesinin bulunduğu ağırlık merkezinde asal gerilmelerin ve maksimum kayma gerilmesinin hesaplanarak izin verilen sınır gerilme değerlerinin aşılmaması da kontrol edilmelidir.

a) Kesitte oluşan düşey (gövde doğrultusu) ve yatay (başlık doğrultusu) kayma gerilmeleri:

Maksimum kesme kuvvetinden dolayı profilde meydana gelen düşey kayma gerilmeleri:

$$\tau_{xz, \text{başlık}} = \frac{V_z Q_{y, \text{başlık}}}{b_{\text{başlık}} I_y} = \frac{75 \times 10^3 \times 330 \times 10^3}{150 \times 7946,67 \times 10^4} = 2,07 \text{ N/mm}^2$$

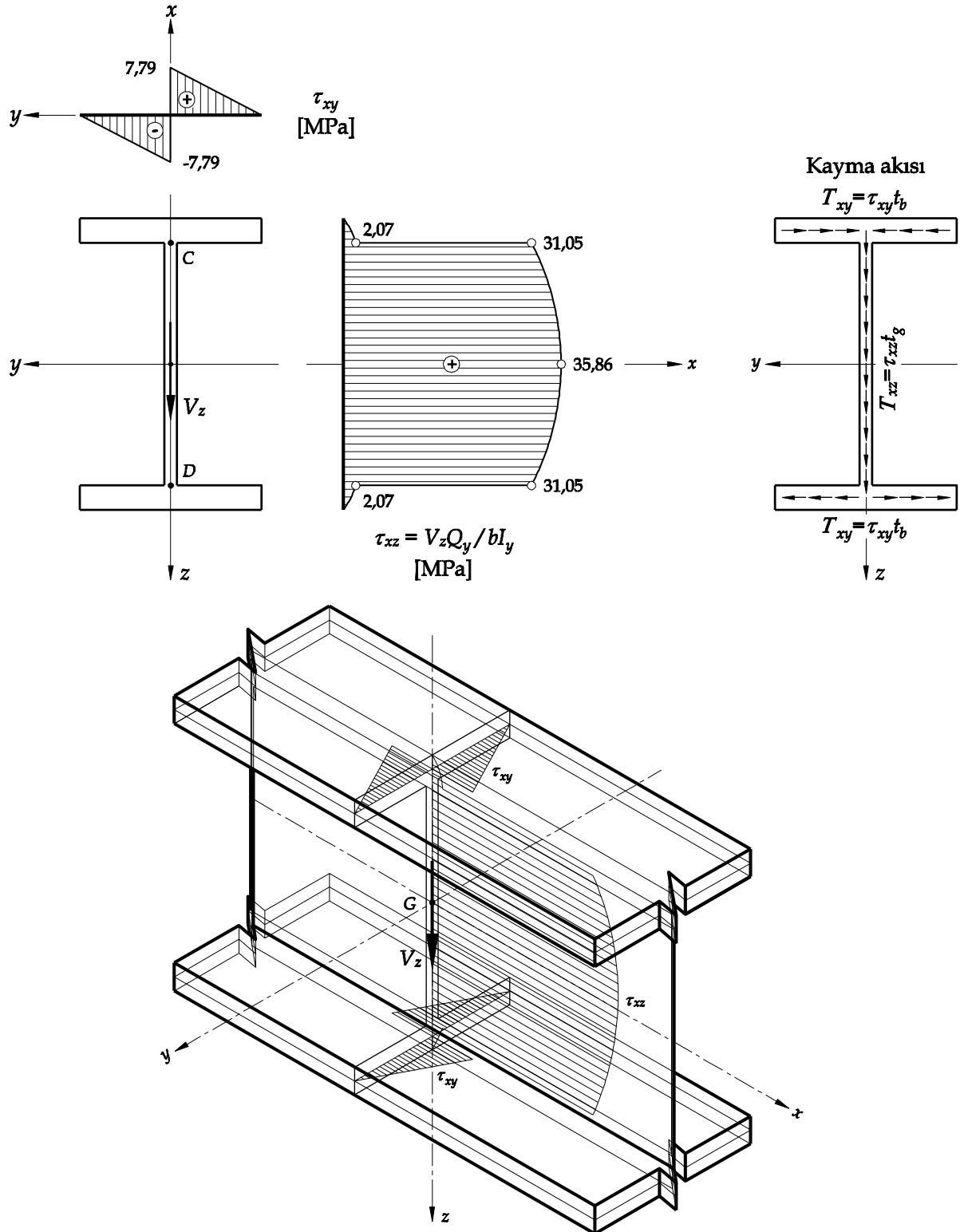
$$\tau_{xz, \text{başlık}} = \frac{V_z Q_{y, \text{başlık}}}{t_{\text{başlık}} I_y} = \frac{75 \times 10^3 \times 330 \times 10^3}{10 \times 7946,67 \times 10^4} = 31,05 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{xz, \text{max}} = \frac{V_z Q_{y, G}}{t_{\text{gövde}} I_y} = \frac{75 \times 10^3 \times 380 \times 10^3}{10 \times 7946,67 \times 10^4} = 35,86 \text{ N/mm}^2$$

Maksimum kesme kuvvetinden dolayı profil başlığında meydana gelen yatay kayma gerilmeleri:

$$\tau_{xy, \text{başlık}} = \frac{V_z (Q_{y, \text{başlık}} / 2)}{t_{\text{başlık}} I_y} = \frac{75 \times 10^3 \times 165 \times 10^3}{20 \times 7946,67 \times 10^4} = 7,79 \text{ N/mm}^2$$

y - z düzleminde hesaplanan τ_{xy} ve τ_{xz} kayma gerilmelerinin dağılımı aşağıdaki şekilde verilmiştir. Büyüklükleri x ekseninde gösterilmiştir.



b) Kesitte oluşan normal gerilmeler:

Eğilmeden dolayı kiriş kesitinin alt kısmı çekme üst kısmı basınç gerilmeleriyle yüklü olacaktır. Eksenel normal kuvvetin varlığı ise tarafsız eksenini ağırlık merkezinden farklı bir noktaya taşıyacaktır.

$$N = +50,00 \text{ kN} ; M_y = +75,00 \text{ kNm}$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A_k} + \frac{M_y}{I_y} z = \frac{50 \times 10^3}{80 \times 10^2} + \frac{75 \times 10^6}{7946,67 \times 10^4} z = 6,25 + 0,944z$$

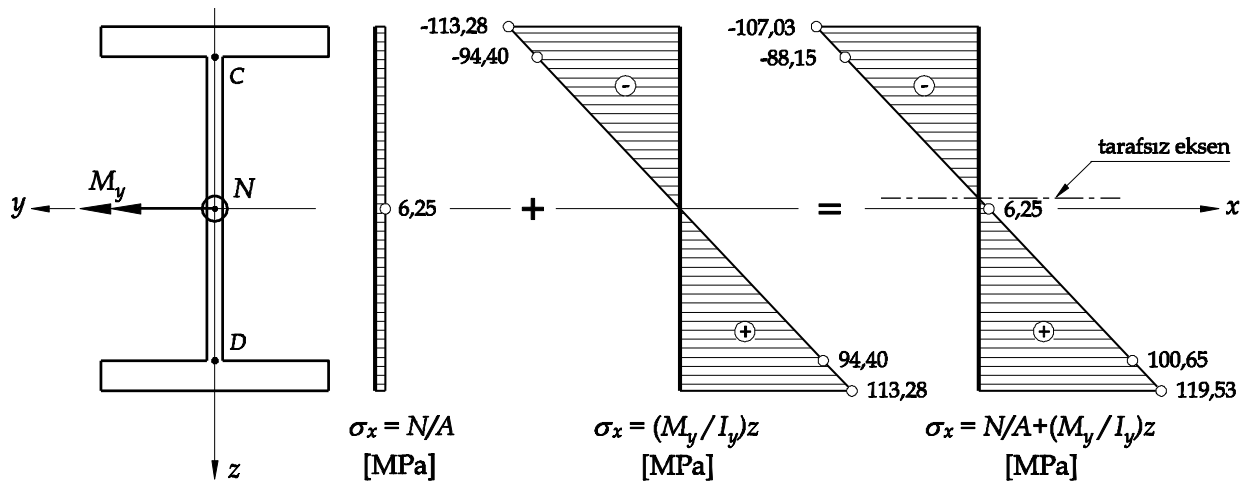
Yukarı elde edilen denklem yardımıyla, eksenel normal kuvvet ve eğilme momentine maruz kirişte, kesitin herhangi bir noktası için ordinat değerini denklemde ilgili yere koyarak normal gerilmeleri elde ederiz.

$$z = +120 \text{ mm} \rightarrow \sigma_{x,\max} = 6,25 + 0,944(120) = 119,53 \text{ N/mm}^2$$

$$z = -120 \text{ mm} \rightarrow \sigma_{x,\min} = 6,25 + 0,944(-120) = -107,03 \text{ N/mm}^2$$

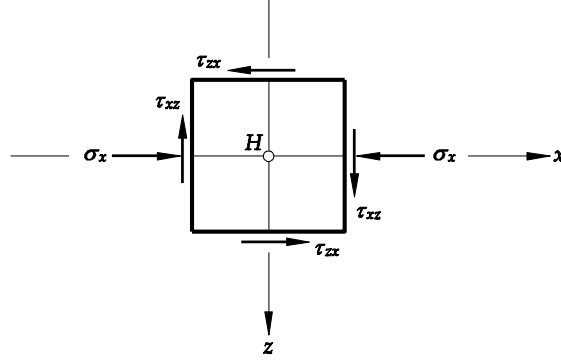
$$z = +100 \text{ mm} \rightarrow \sigma_{x,D} = 6,25 + 0,944(100) = 100,65 \text{ N/mm}^2$$

$$z = -100 \text{ mm} \rightarrow \sigma_{x,C} = 6,25 + 0,944(-100) = -88,15 \text{ N/mm}^2$$



c) Başlık ile gövdenin birleştiği noktalarda gerilme halinin tasviri:

Başlık ile gövdenin birleştiği C Noktası için gövde düzleminde meydana gelen asal gerilmelerin hesabı:



$$\sigma_x = -88,15 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_z = 0 \quad ; \quad \tau_{xz} = 31,05 \text{ MPa}$$

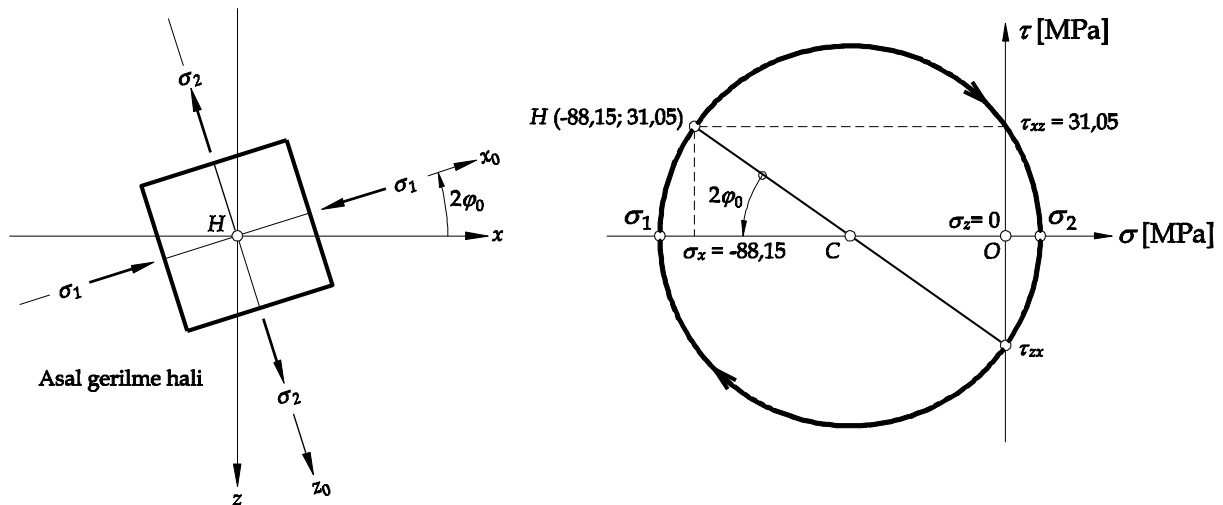
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{-88,15}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-88,15}{2}\right)^2 + 31,05^2} = -44,075 \pm 53,914$$

$$\sigma_1 = -97,99 \text{ MPa}$$

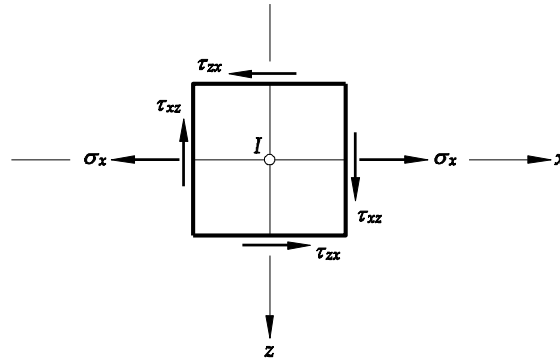
$$\sigma_2 = +9,84 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{\tau_{xz}}{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)} = \frac{31,05}{\left(\frac{-88,15}{2}\right)} = 0,70448 \rightarrow 2\varphi_0 = -35,16^\circ$$

$$\varphi_0 = -17,58^\circ \rightarrow x_0 = -17,58^\circ; y_0 = 72,42^\circ$$



Başlık ile gövdenin birleştiği *D* Noktası için gövde düzleminde meydana gelen asal gerilmelerin hesabı:



$$\sigma_x = 100,65 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_z = 0 \quad ; \quad \tau_{xz} = 31,05 \text{ MPa}$$

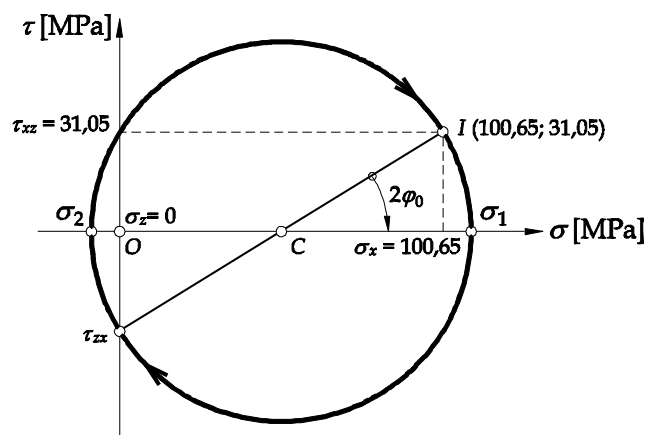
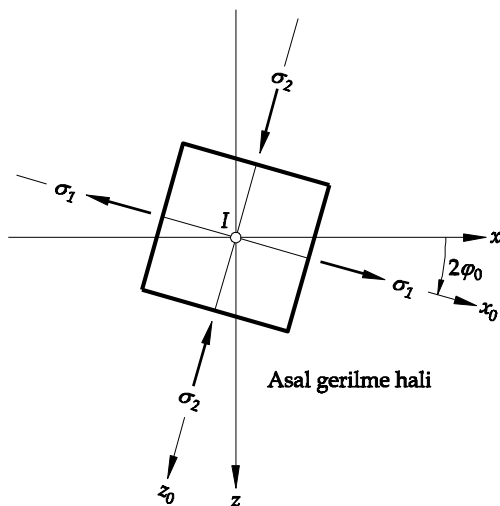
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{100,65}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{100,65}{2}\right)^2 + 31,05^2} = 50,325 \pm 59,133$$

$$\sigma_1 = +109,46 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -8,81 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{\tau_{xz}}{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)} = \frac{31,05}{\left(\frac{100,65}{2}\right)} = 0,61699 \rightarrow 2\varphi_0 = 31,67^\circ$$

$$\varphi_0 = 15,84^\circ \rightarrow x_0 = 15,84^\circ; \quad y_0 = 105,84^\circ$$



d) Maksimum ve minimum gerilmeler ile $\sigma_{em}=140$ MPa ve $\tau_{em}=80$ MPa için kesitte gerilme tahkiki:

Başlık ile gövdenin birleştiği **C** noktasında en büyük kayma gerilmesi hipotezi ile emniyet gerilmelerinin aşılmadığı tahkiki:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \stackrel{?}{\leq} \sigma_{em} \rightarrow |-97,99 - (9,84)| = 107,33 \text{ MPa} \leq \sigma_{em} \text{ (Güvenli)}$$

Başlık ile gövdenin birleştiği **C** noktasında biçim değiştirme enerjisi hipotezi ile tahkik:

$$\frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sigma_1 \sigma_2 \stackrel{?}{\leq} \sigma_{em}^2}{\sqrt{(-97,99)^2 + (9,84)^2 - (-97,99 \times 9,84)}} = 103,26 \text{ MPa} \leq \sigma_{em} \text{ (Güvenli)}$$

Başlık ile gövdenin birleştiği **D** noktasında en büyük kayma gerilmesi hipotezi ile tahkik:

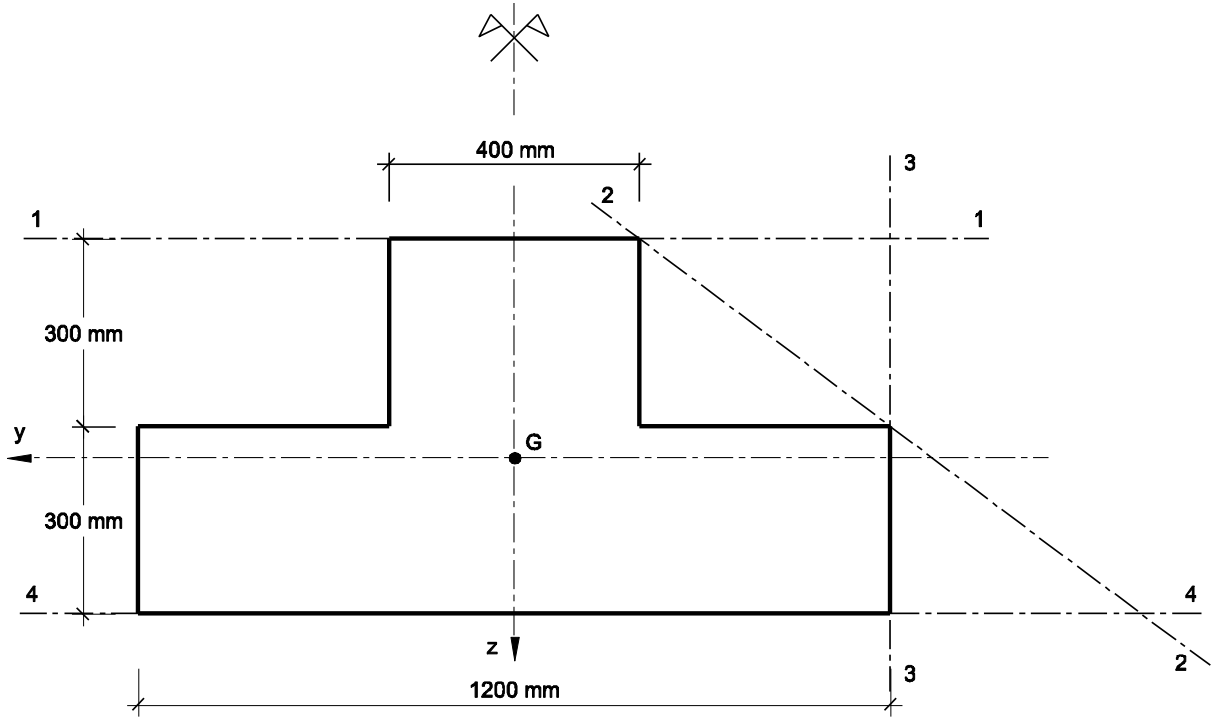
$$|\sigma_1 - \sigma_2| \stackrel{?}{\leq} \sigma_{em} \rightarrow |109,46 - (-8,81)| = 118,27 \text{ MPa} \leq \sigma_{em} \text{ (Güvenli)}$$

Başlık ile gövdenin birleştiği **D** noktasında biçim değiştirme enerjisi hipotezi ile tahkik:

$$\frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sigma_1 \sigma_2 \stackrel{?}{\leq} \sigma_{em}^2}{\sqrt{(109,46)^2 + (8,81)^2 - (109,46 \times (-8,81))}} = 114,12 \text{ MPa} \leq \sigma_{em} \text{ (Güvenli)}$$

---- 0 ----

Örnek 6. Şekilde boyutları verilmiş kesitin çekirdek bölgesini hesap ediniz ve çekirdek bölgesinin ne anlama geldiğini kısaca açıklayınız.



Çözüm 6. Dışmerkez normal kuvvetin uygulama noktasının çekirdek bölgesi içinde veya sınırında olması hali, kesitte meydana gelen normal gerilmelerin tek yönlü olacağı anlamına gelmektedir. Uygulama noktasının çekirdek bölgesinin dışına çıkması hali ise kesitte meydana gelen normal gerilmelerin çift yönlü olarak meydana geleceğini göstermektedir. Çekirdek alanını belirleyen noktaları hesaplayabilmek için normal gerilmenin tek yönlü ve tarafsız eksenin kesit sınırında bulunduğu özel hal dikkate alınmalıdır. Dolayısıyla, şekilde verilen teğetlerin, ağırlık merkezinden geçen eksen takımını kestiği noktaların koordinatlarının belirlenmesi gerekir.

Kesit alanı : $A_k = (300 \times 1200) + (300 \times 400) = 480000,00 \text{ mm}^2$

Ağırlık merkezi : $e_z = [(1200 \times 300 \times 150) + (400 \times 300 \times 450)] / 480000 = 225,00 \text{ mm}$

Atalet momentleri:

$$I_y = \left(\frac{1200 \times 300^3}{12} + 1200 \times 300 \times 75^2 \right) + \left(\frac{400 \times 300^3}{12} + 400 \times 300 \times 225^2 \right) = 117 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_z = \left(\frac{300 \times 1200^3}{12} \right) + \left(\frac{300 \times 400^3}{12} \right) = 448 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

Atalet yarıçapları:

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A_k} = \frac{117 \times 10^8}{480000} = 24375,00 \text{ mm}^2$$

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A_k} = \frac{448 \times 10^8}{480000} = 93333,33 \text{ mm}^2$$

Şekilde verilen teğetler için çekirdek noktalarının hesabı:

$$y_A = -\frac{i_z^2}{y_t} \quad ; \quad z_A = -\frac{i_y^2}{z_t}$$

A1 noktasının hesabı için ağırlık merkezinden geçen eksen takımına göre 1-1 teğetinin eksenleri kestiği koordinatlar, $y_{t,1} = \infty; z_{t,1} = -375 \text{ mm}$ olarak hesaplanır. Dolayısıyla **A1** noktasının koordinatları:

$$y_{A1} = 0 \quad ; \quad z_{A1} = -\frac{24375}{-375} = 65,00 \text{ mm}$$

olarak bulunur. **A2** noktasının hesabı için ağırlık merkezinden geçen eksen takımına göre 2-2 teğetinin eksenleri kestiği koordinatlar, $y_{t,2} = -700 \text{ mm}; z_{t,2} = -525 \text{ mm}$ olarak hesaplanır. Dolayısıyla **A2** noktasının koordinatları:

$$y_{A2} = -\frac{93333,33}{-700} = 133,33 \text{ mm} \quad ; \quad z_{A2} = -\frac{24375}{-525} = 46,43 \text{ mm}$$

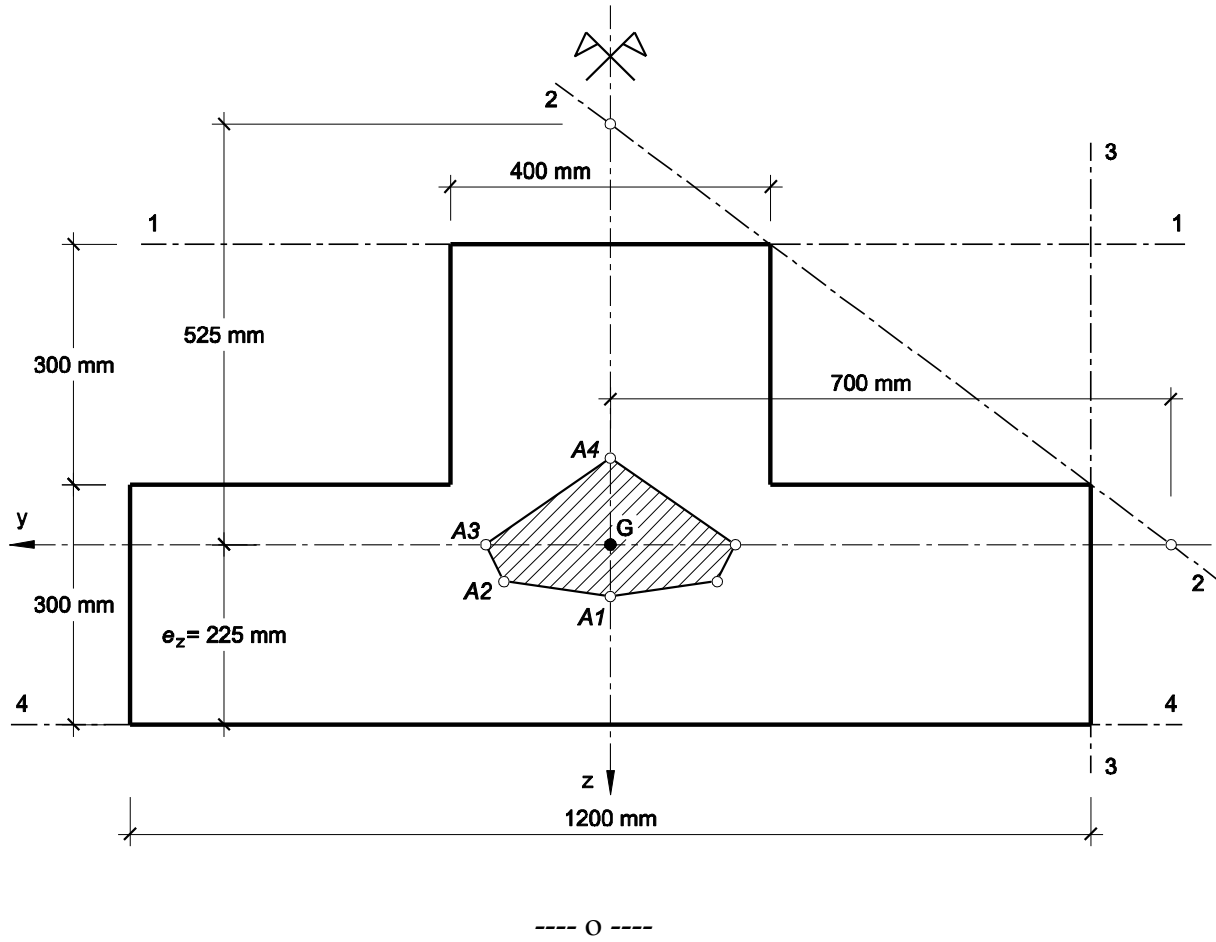
olarak bulunur. **A3** noktasının hesabı için ağırlık merkezinden geçen eksen takımına göre 3-3 teğetinin eksenleri kestiği koordinatlar, $y_{t,3} = -600 \text{ mm}; z_{t,3} = \infty$ olarak hesaplanır. Dolayısıyla **A3** noktasının koordinatları:

$$y_{A3} = -\frac{93333,33}{-600} = 155,55 \text{ mm} \quad ; \quad z_{A3} = 0$$

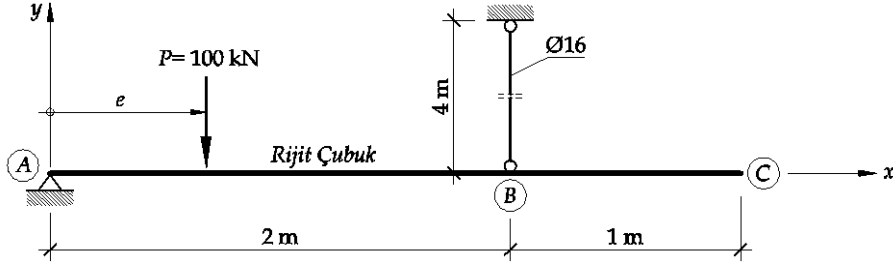
olarak bulunur. **A4** noktasının hesabı için ağırlık merkezinden geçen eksen takımına göre 4-4 teğetinin eksenleri kestiği koordinatlar, $y_{t,4} = \infty; z_{t,4} = 225 \text{ mm}$ olarak hesaplanır. Dolayısıyla **A4** noktasının koordinatları:

$$y_{A4} = 0 \quad ; \quad z_{A4} = -\frac{24375}{225} = -108,33 \text{ mm}$$

olarak bulunur. Kesit z eksenine göre simetrik olduğu için **A2** ve **A3** noktalarının y eksenindeki değerleri eksi işaretli alınarak çekirdek bölgesi çizilir.



Örnek 7. Yukarıdaki şekilde görülen rijit AC çubuğu, B noktasında 16 mm çapında dairesel kesitli bir çubuk ile asılmıştır. Askı çubuğun iki ucu mafsallıdır. C noktasındaki düşey yerdeğiştirmenin 6 mm olması için 100 kN şiddetindeki P kuvvetinin bulunması gereken e mesafesini ve A mesnedindeki reaksiyon kuvvetini hesaplayınız. Askı çubuğunun elastisite modülü $E=2 \times 10^5$ MPa'dır.



Çözüm 7. Rijit AC çubuğunda C noktasında meydana gelen 6 mm'lik düşey yerdeğiştirme B noktasında, benzerlikten 4 mm olarak hesaplanır. Yerdeğiştirmenin yönü, çubuğa etkiyen P kuvveti ile aynı yöndedir. Dolayısıyla askı çubuğunda 4 mm'lik bir uzama söz konusudur. Askı çubuğundaki çekme kuvvetine S_1 , çubuk uzunluğuna da l_1 dersek,

$$\Delta l_1 = \frac{S_1 l_1}{EA} \rightarrow S_1 = \frac{\Delta l_1 EA}{l_1} \rightarrow S_1 = \varepsilon_1 EA$$

$$\varepsilon_1 = 4 / 4000 = 0,001$$

$$S_1 = 0,001 \times (2 \times 10^5) \times (\pi \times 8^2) \rightarrow \boxed{S_1 = 40211 \text{ N}}$$

değeri elde edilir. Denge denklemleri yardımıyla P kuvvetinin bulunması gereken e mesafesi ve mesnet reaksiyonu elde edilir.

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow R_{Ay} - P + S_1 = 0 \rightarrow R_{Ay} + S_1 = P \quad (1)$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow 2S_1 - Pe = 0 \rightarrow 2S_1 = Pe \quad (2)$$

(1) numaralı denklemden,

$$R_{Ay} + S_1 = P \rightarrow R_{Ay} = 100 - 40,21 \rightarrow \boxed{R_{Ay} = 59,79 \text{ kN}}$$

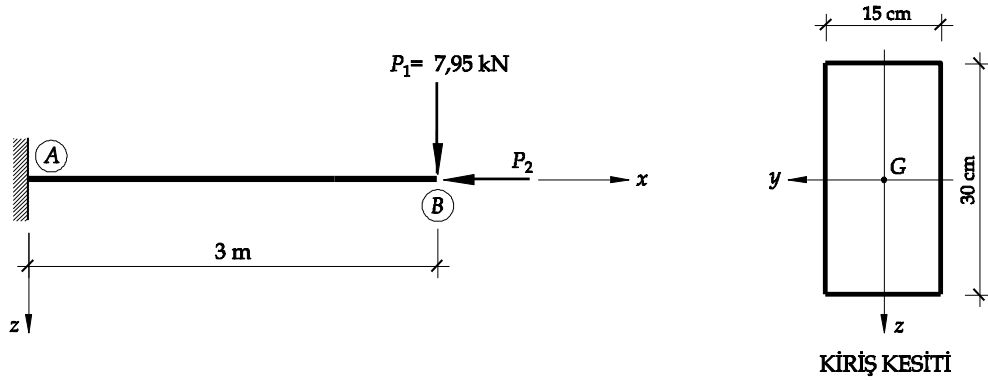
(2) numaralı denklemden,

$$2S_1 = Pe \rightarrow e = 40,21 / 50 \rightarrow \boxed{e = 0,804 \text{ m}}$$

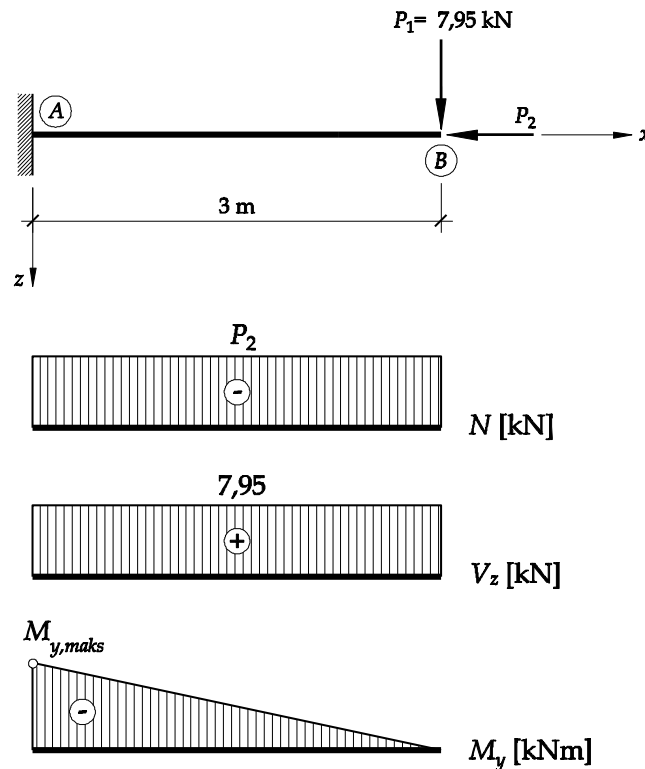
olarak elde edilir.

Örnek 8. Şekilde görülen, 3 metre uzunluğundaki dikdörtgen kesitli konsol kiriş, B ucunda P_1 ve P_2 tekil kuvvetleriyle yüklenmiştir. Kiriş kesiti 15 cm x 30 cm ve P_1 kuvvetinin şiddeti 7,95 kN olduğuna göre:

- a) Bu yükleme altında kirişte meydana gelen en büyük çekme gerilmesinin 1,2 MPa ve en büyük basınç gerilmesinin de 20 MPa olması istenmektedir. Konsol ucuna etkimesi gereken P_2 kuvvetinin şiddetini ve kesitteki uygulama noktasını bulunuz.
- b) Kiriş kesitinde meydana gelen çekme gerilmelerinin sıfır, en büyük basınç gerilmesinin de 20 MPa olması istenseydi, konsol ucuna etkimesi gereken P_2 kuvvetinin şiddetini ve kesitteki uygulama noktasını bularak şekil üzerinde gösteriniz.



Çözüm 8. Eğilme momenti konsol kirişin mesnet noktasında maksimum değerini alacaktır. Dolayısıyla, soruda istenen sınır değerlerin elde edilmesi için yapılacak hesaplamalar A noktasında olacaktır. Kesit tesiri diyagramları aşağıda verilmiştir.



Kiriş kesitinde:

$$\text{Kesit alanı} : A_k = 150 \times 300 = 450 \times 10^2 \text{ mm}^2$$

$$\text{Atalet momenti} : I_y = \frac{150 \times 300^3}{12} = 33750 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$\text{Mukavemet momenti} : W_y = \frac{150 \times 300^2}{6} = 2250 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

Verilen düzlem kuvvetler sisteminde, kiriş kesiti tek eksenli eğilmeye maruzdur. Kiriş ucunda bulunan P_1 kuvveti A noktasında maksimum eğilme momentini oluşturmaktadır. P_2 eksenel kuvveti ise kiriş boyunca sabittir. İstenilen nihai gerilme değerleri için eksenel kuvvetin tatbik noktası da sorulduğu için P_2 kuvvetini dışmerkez normal kuvvet gibi değerlendirmemiz gerekir. Bu durumda, P_1 kuvvetinin kiriş üzerinde oluşturduğu eğilme momentine ilave bir eğilme momenti de dışmerkez P_2 kuvveti nedeniyle meydana gelecektir. Kirişteki toplam eğilme momenti M_y olmak üzere, P_1 kuvvetinin meydana getirdiği eğilme momentine M_{y1} ve P_2 kuvvetinin dışmerkezliğinden dolayı meydana gelen eğilme momentine de M_{y2} dersek, bu şartlar altında genel gerilme bağıntısını aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{N}{A_k} + \frac{M_y}{I_y} z = \frac{N}{A_k} + \frac{M_{y1} + M_{y2}}{I_y} z \\ M_{y2} &= N z_A \\ \sigma_x &= \frac{N}{A_k} + \frac{(M_{y1} + N z_A)}{I_y} z = \frac{N}{A_k} + \frac{M_{y1}}{I_y} z + \frac{N z_A}{I_y} z \end{aligned}$$

Yukarıda elde edilen denklem yardımıyla, çubuğun mesnet kesitindeki eğilme momentinden dolayı meydana gelen normal gerilmeler, hem eğilme momenti oluşturan P_1 kuvvetiyle hem de dışmerkez etkidiği kabul edilen P_2 kuvveti ile ilişkilendirilmiş olmaktadır.

a) Verilen nihai gerilme durumu için P_2 kuvvetinin şiddeti ve kesitteki uygulama noktasının hesabı:

P_2 kuvveti kirişte basınç gerilmesi oluşturacak şekilde verilmiştir. Verilen yükleme altında nihai gerilme durumu için en büyük çekme gerilmesinin $\sigma_{ç,maks} = 1,2 \text{ MPa}$, en büyük basınç gerilmesinin de $\sigma_{b,maks} = 20 \text{ MPa}$ olması istenmektedir. Yukarıda verilen denklem yardımıyla, kesitte söz konusu gerilmelerin meydana gelmesi gereken noktaların z eksenindeki ordinat değerlerini ilgili yere koyarak, nihai gerilme değerleri için P_2 normal kuvvetini ve tatbik noktasını elde edebiliriz. P_1 kuvvetinden dolayı meydana gelen eğilme momenti negatif (-) olacağından çubuğun üst liflerine çekme, alt liflerine de basınç gerilmesi etkiyecektir. Bu yönleri koruyarak kesitin en dış lifleri için çıkartılan denklemler aşağıda verilmiştir.

$$N = -P_2 ; M_{y1} = -3 \times P_1 = -23,85 \text{ kN} \cdot \text{m} ; Nz_A = -P_2 \times e_z$$

$$z = +150 \text{ mm} \rightarrow \sigma_{x,\min} = -20 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} -20 &= \frac{-P_2}{45 \times 10^3} + \left(\frac{(-23,85 \times 10^6) + (-P_2 \times e_z)}{33750 \times 10^4} \times (+150) \right) \\ -20 &= (-2,222 P_2 \times 10^{-5}) - 10,6 + (-4,444 P_2 \times e_z \times 10^{-7}) \\ -9,4 &= P_2 (-2,222 \times 10^{-5} - 4,444 \times 10^{-7} \times e_z) \dots (1) \end{aligned}$$

$$z = -150 \text{ mm} \rightarrow \sigma_{x,\max} = +1,2 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} 1,2 &= \frac{-P_2}{45 \times 10^3} + \left(\frac{(-23,85 \times 10^6) + (-P_2 \times e_z)}{33750 \times 10^4} \times (-150) \right) \\ 1,2 &= (-2,222 P_2 \times 10^{-5}) + 10,6 + (4,444 P_2 \times e_z \times 10^{-7}) \\ -9,4 &= P_2 (-2,222 \times 10^{-5} + 4,444 \times 10^{-7} \times e_z) \dots (2) \end{aligned}$$

P_2 ve e_z bilinmeyenlerini bulmak için kesitin en alt ve en üst noktalarında, istenen gerilme değerleri için elde ettiğimiz (1) ve (2) denklemlerini taraf tarafa toplarsak,

$$\begin{aligned} -9,4 &= P_2 (-2,222 \times 10^{-5} - 4,444 \times 10^{-7} \times e_z) \\ -9,4 &= P_2 (-2,222 \times 10^{-5} + 4,444 \times 10^{-7} \times e_z) \\ -18,8 &= 2 P_2 (-2,222 \times 10^{-5}) \\ P_2 &= -9,4 / (-2,222 \times 10^{-5}) \\ \boxed{P_2 = 423000 \text{ N}} \end{aligned}$$

değerini elde ederiz. P_2 kuvvetinin değerini (1) veya (2) denkleminde yerine koyarak eksenel kuvvetin dışmerkezlik mesafesi e_z değerini hesaplayabiliriz.

$$\begin{aligned} -9,4 &= 423000 \times (-2,222 \times 10^{-5} - 4,444 \times 10^{-7} \times e_z) \\ -9,4 &= -9,4 - 0,19 e_z \\ \boxed{e_z = 0} \end{aligned}$$

Görüleceği üzere e_z mesafesi sıfır çıkmıştır. Dolayısıyla, nihai gerilme durumu için hesaplanan P_2 kuvveti, çubuk kesitinin ağırlık merkezinden etkimektedir. Yani dışmerkez değil merkezi bir kuvvettir.

Alternatif kısa çözüm:

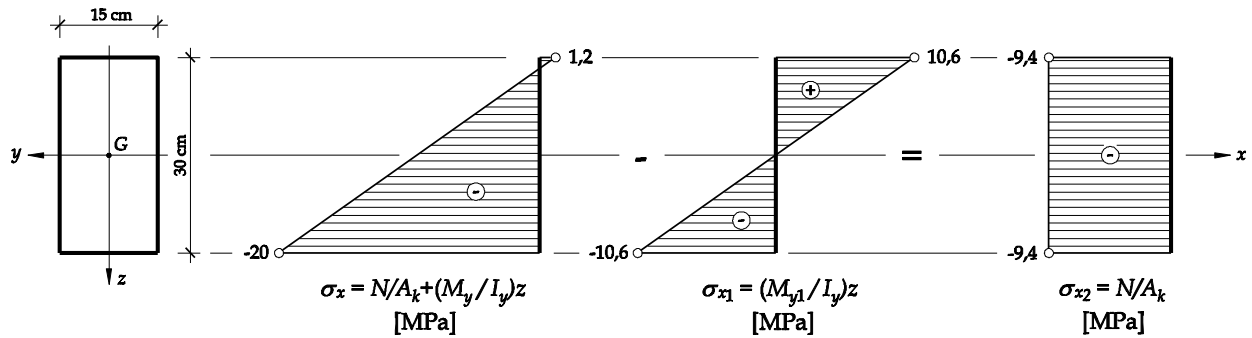
Kesitte meydana gelen normal gerilmeleri süperpozisyon prensibi ile iki kısımda ifade edebiliriz. Birincisi toplam eğilme momenti dolayısıyla oluşan normal gerilmeler, ikincisi de eksenel normal kuvvet dolayısıyla oluşan normal gerilmelerdir. Dışmerkez etkidiği farz edilen P_2 kuvvetinin şiddeti bilinmemektedir. Dolayısıyla dışmerkezlikten kaynaklanan eğilme momentinin şiddeti de belirsizdir. Ancak, P_1 kuvvetinin şiddeti

bilindiği için mesnette oluşturduğu eğilme momenti ve normal gerilmeler hesaplanabilir. P_1 kuvvetinin meydana getirdiği eğilme momentine M_{y1} ve bu eğilme momentinden dolayı meydana gelen maksimum ve minimum normal gerilmelere de σ_{x1} dersek,

$$M_{y1} = -3 \times P_1 = -3 \times 7,95 = -23,85 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_{x1} = \pm \frac{M_{y1}}{W_y} = \pm \frac{23,85 \times 10^6}{2250 \times 10^3} = \pm 10,6 \text{ MPa}$$

değeri elde edilir. Kesitte oluşması istenilen nihai gerilmelerden, yukarıda hesaplanan değerler çıkartılırsa, dışmerkez etkidiği farz edilen P_2 eksenel kuvveti dolayısıyla oluşacak normal gerilme değerleri elde edilebilir. Kiriş negatif eğilme momentine maruz olduğuna göre, üst lifler çekmeye alt lifler ise basınca çalışacaktır. Bu yönler korunarak kesitte oluşan gerilmeler grafik olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir.



Görülebileceği üzere, çıkarma işleminden sonra σ_{x2} olarak elde edilen gerilme düzgün/üniform bir dağılım göstermektedir. Dolayısıyla, kesite etkileyen P_2 eksenel normal kuvvetinin dışmerkez değil, merkezi olduğu buradaki gerilme dağılımından kolaylıkla anlaşılmaktadır. 9,4 MPa şiddetindeki basınç gerilmesiyle kesit alanı çarpılarak P_2 eksenel normal kuvveti bulunur.

$$\sigma_{x2} = \frac{N}{A_k} \quad \rightarrow \quad N = -9,4 \times 45 \times 10^3 = -423000 \text{ N}$$

$$P_2 = 423 \text{ kN}$$

b) Verilen nihai gerilme durumu için P_2 kuvvetinin şiddeti ve kesitteki uygulama noktasının hesabı:

Verilen yükleme altında nihai gerilme durumu için en büyük çekme gerilmesinin $\sigma_c = 0$, en büyük basınç gerilmesinin de $\sigma_{b,\text{maks}} = 20 \text{ MPa}$ olması istenmektedir. Yukarıda verilen genel denklem yardımıyla, kesitte söz konusu gerilmelerin meydana gelmesi gereken noktaların z eksenindeki ordinat değerlerini ilgili yere koyarak, nihai gerilme değerleri için P_2 normal kuvvetini ve tatbik noktasını elde edebiliriz. P_1 kuvvetinden dolayı meydana gelen eğilme momenti negatif (-) olacağından çubuğun üst liflerine çekme, alt liflerine de basınç gerilmesi etkiyecektir. Bu yönleri koruyarak kesitin en dış lifleri için çıkartılan denklemler aşağıda verilmiştir.

$$N = -P_2 ; M_y = -3 \times P_1 = -23,85 \text{ kNm} ; N_{z_A} = -P_2 \times e_z$$

$$z = +150 \text{ mm} \rightarrow \sigma_{x,\min} = -20 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} -20 &= \frac{-P_2}{45 \times 10^3} + \left(\frac{(-23,85 \times 10^6) + (-P_2 \times e_z)}{33750 \times 10^4} \times (+150) \right) \\ -20 &= (-2,222 P_2 \times 10^{-5}) - 10,6 + (-4,444 P_2 \times e_z \times 10^{-7}) \\ -9,4 &= P_2 (-2,222 \times 10^{-5} - 4,444 \times 10^{-7} \times e_z) \dots (1) \end{aligned}$$

$$z = -150 \text{ mm} \rightarrow \sigma_{x,\max} = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{-P_2}{45 \times 10^3} + \left(\frac{(-23,85 \times 10^6) + (-P_2 \times e_z)}{33750 \times 10^4} \times (-150) \right) \\ 0 &= (-2,222 P_2 \times 10^{-5}) + 10,6 + (4,444 P_2 \times e_z \times 10^{-7}) \\ -10,6 &= P_2 (-2,222 \times 10^{-5} + 4,444 \times 10^{-7} \times e_z) \dots (2) \end{aligned}$$

P_2 ve e_z bilinmeyenlerini bulmak için kesitin en alt ve en üst noktalarında, istenen gerilme değerleri için elde ettiğimiz (1) ve (2) denklemlerini taraf tarafa toplarsak,

$$\begin{aligned} -9,4 &= P_2 (-2,222 \times 10^{-5} - 4,444 \times 10^{-7} \times e_z) \\ -10,6 &= P_2 (-2,222 \times 10^{-5} + 4,444 \times 10^{-7} \times e_z) \\ -20 &= 2 P_2 (-2,222 \times 10^{-5}) \\ P_2 &= -10 / (-2,222 \times 10^{-5}) \\ \boxed{P_2 = 450000 \text{ N}} \end{aligned}$$

değerini elde ederiz. P_2 kuvvetinin değerini (1) veya (2) denkleminde yerine koyarak eksenel kuvvetin dışmerkezlik mesafesi e_z değerini hesaplayabiliriz.

$$\begin{aligned} -9,4 &= 450000 \times (-2,222 \times 10^{-5} - 4,444 \times 10^{-7} \times e_z) \\ -9,4 &= -10 - 0,2 e_z \\ \boxed{e_z = -3,0 \text{ mm}} \end{aligned}$$

Görüldüğü üzere, 450 kN şiddetindeki P_2 kuvvetinin, ağırlık merkezinden 3 mm yukarı kaydırılmasıyla kesitin en üst liflerinde meydana gelen normal gerilmenin şiddeti sıfır olarak elde edilebilmektedir.

Alternatif kısa çözüm:

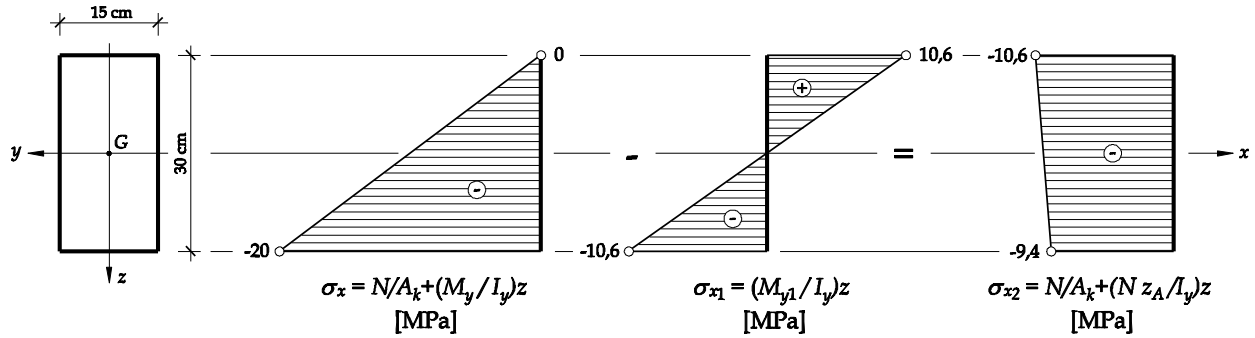
Bir önceki çözümde yaptığımız gibi, kesitte meydana gelen normal gerilmeleri süperpozisyon prensibi ile iki kısımda ifade edebiliriz. Birincisi toplam eğilme momenti dolayısıyla oluşan normal gerilmeler, ikincisi de eksenel normal kuvvet dolayısıyla oluşan normal gerilmelerdir. Dışmerkez etkidiği farz edilen P_2 kuvvetinin şiddeti bilinmemektedir. Dolayısıyla dışmerkezlikten kaynaklanan eğilme momentinin şiddeti

de belirsizdir. Ancak, P_1 kuvvetinin şiddeti bilindiği için mesnette oluşturduğu eğilme momenti ve normal gerilmeler hesaplanabilir. P_1 kuvvetinin meydana getirdiği eğilme momentine M_{y1} ve bu eğilme momentinden dolayı meydana gelen maksimum ve minimum normal gerilmelere de σ_{x1} dersek,

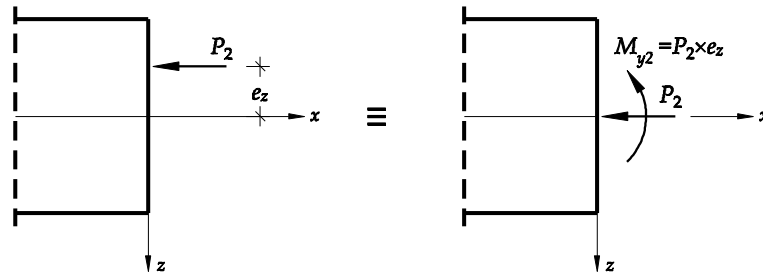
$$M_{y1} = -3 \times P_1 = -3 \times 7,95 = -23,85 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_{x1} = \pm \frac{M_{y1}}{W_y} = \pm \frac{23,85 \times 10^6}{2250 \times 10^3} = \pm 10,6 \text{ MPa}$$

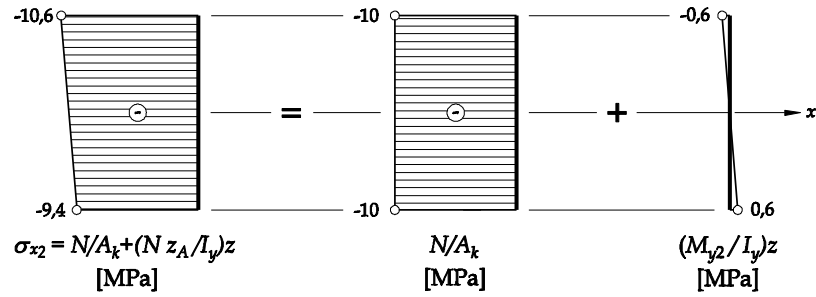
değeri elde edilir. Kesitte oluşması istenilen nihai gerilmelerden, yukarıda hesaplanan değerler çıkartılırsa, dışmerkez etkidiği farz edilen P_2 eksenel kuvveti dolayısıyla oluşacak normal gerilme değerleri elde edilebilir. Kiriş negatif eğilme momentine maruz olduğuna göre, üst lifler çekmeye alt lifler ise basınca çalışacaktır. Bu yönler korunarak kesitte oluşan gerilmeler grafik olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir.



Görüleceği üzere, çıkarma işleminden sonra σ_{x2} olarak elde edilen gerilme yamuk formunda, kesit yüksekliği boyunca düzgün değişen bir dağılım göstermektedir. Gerilme dağılımının bu şekilde olması, P_2 kuvvetinin dışmerkez etkidiğine işaret etmektedir. Dolayısıyla, eksenel normal kuvvet ile birlikte dışmerkezlikten kaynaklanan bir eğilme momenti söz konusudur. Bu kuvvet sistemini kesitin ağırlık merkezinde, kuvvet-kuvvet çifti olarak ifade etmek ve iki kısma ayırarak grafik olarak incelemek mümkündür. Yukarıdaki yamuk formulu gerilme dağılımını, eksenel normal kuvvet ve neden olduğu eğilme momentini ifade edecek şekilde aşağıdaki gibi ayırabiliriz.



Böylelikle, kesite etkiyen P_2 eksenel normal kuvvetinin şiddeti ve M_{y2} eğilme momentinin şiddeti kolaylıkla hesaplanabilir. M_{y2} eğilme momentini bulunduktan sonra ise P_2 kuvveti bilindiği için e_z mesafesi de hesaplanabilir.



$$\sigma_{x2} = \frac{N}{A_k} + \frac{M_{y2}}{W_y}$$

$$\frac{N}{A_k} = -10 \text{ MPa} \quad \rightarrow \quad N = -10 \times 45 \times 10^3 = -450000 \text{ N}$$

$$P_2 = 450 \text{ kN}$$

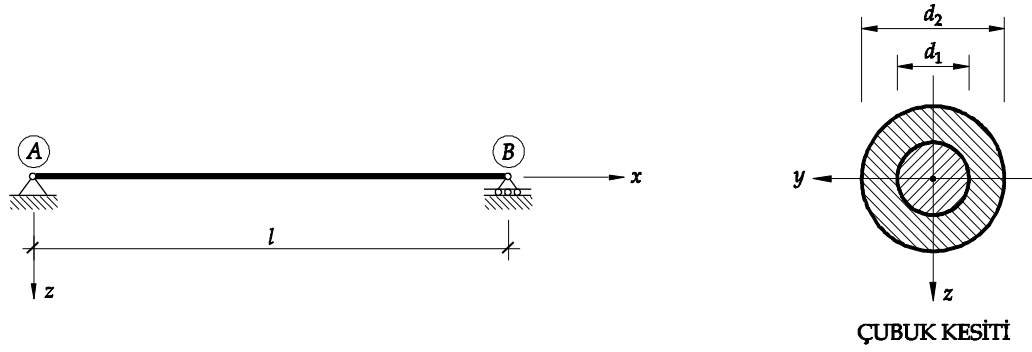
$$\frac{M_{y2}}{W_y} = 0,6 \text{ MPa} \quad \rightarrow \quad M_{y2} = 0,6 \times 2250 \times 10^3 = 1350 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{y2} = P_2 \times e_z \quad \rightarrow \quad 1350 \times 10^3 = 450000 \times e_z$$

$$e_z = 3 \text{ mm}$$

---- o ----

Örnek 9. Şekilde görülen l uzunluğundaki çubuk dairesel kesitli olup iki malzemeli bileşik çubuktur. Dış kısımda bulunan alüminyum tüp, iç kısımdaki bakır çubuğun üzerine giydirilmiş ve oda sıcaklığına birbirlerine yapıştırılmıştır. Tek bir eleman gibi davranan çubukta, oda sıcaklığı 20°C arttırıldığında çubuk kesitinde meydana gelen aksenal gerilmeleri hesaplayınız ve kesit üzerinde gösteriniz. Alüminyum tüpün iç çapı $d_1 = 20$ mm, dış çapı $d_2 = 40$ mm'dir. Alüminyum malzemenin elastisite modülü $E = 0,7 \times 10^5$ MPa, sıcaklık genleşme katsayısı $\alpha_t = 2,380 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$, bakır malzemenin elastisite modülü $E = 1,12 \times 10^5$ MPa, sıcaklık genleşme katsayısı $\alpha_t = 1,698 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$ 'dur.



Çözüm 9. AB çubuğu izostatik olduğu için sıcaklık artışından dolayı meydana gelecek boy değişiminden herhangi bir aksenal kuvvetle yüklenmeyecektir. Çubuk, B noktasındaki kayar mesnet nedeniyle serbestçe uzayabilecektir. Ancak, bileşik kesit olarak verilen çubukta meydana gelen boy değişimi, çubuğu oluşturan iki farklı malzemenin farklı genleşme katsayıları nedeniyle, kesitte farklı gerilme değerlerinin açığa çıkmasına neden olacaktır. Genleşme katsayısı büyük olan cisim daha fazla uzama isteminde bulunurken, genleşme katsayısı küçük olan cisim bu istemi kısıtlayacaktır. İki çubuğun birbirine yapışık olması nedeniyle meydana gelen uyum, gerilmelerin zıt yönlü olmasına sebep olacaktır. Bu gerilmeler, sistem izostatik olduğu için çubuk kesitinde dengelenecektir. Yani, tek bir eleman gibi davranan çubukta, her malzeme için sıcaklık artışından sonra meydana gelen şekildeğiştirmeler birbirine eşit, denge hali söz konusu olduğu için kesitteki gerilmelerin bileşkesi de sıfır olacaktır. Bu noktadan hareketle, bakır ve alüminyum çubukların kesit alanlarına sırasıyla A_1 ve A_2 , kesitlerinde meydana gelen gerilmelere de σ_1 ve σ_2 dersek,

Denge denklemi,

$$\begin{aligned}\Sigma N &= 0 \\ (\sigma_1 \times A_1) + (\sigma_2 \times A_2) &= 0\end{aligned}$$

Uygunluk şartı,

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

olacaktır. Dolayısıyla, denge denkleminden σ_1 ,

$$\sigma_1 = -\sigma_2 \times \frac{A_2}{A_1} \quad \dots (1)$$

bağıntısı ile ifade edilebilir. Uygunluk şartında her çubuk için şekildeğiştirme oranlarını yazıp birbirine eşitlersek,

$$\begin{aligned}\alpha_1 \Delta t + \frac{N_1}{E_1 A_1} &= \alpha_2 \Delta t + \frac{N_2}{E_2 A_2} \\ \sigma_1 &= \frac{N_1}{A_1} ; \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} \\ \alpha_1 \Delta t + \frac{\sigma_1}{E_1} &= \alpha_2 \Delta t + \frac{\sigma_2}{E_2} \quad \dots (2)\end{aligned}$$

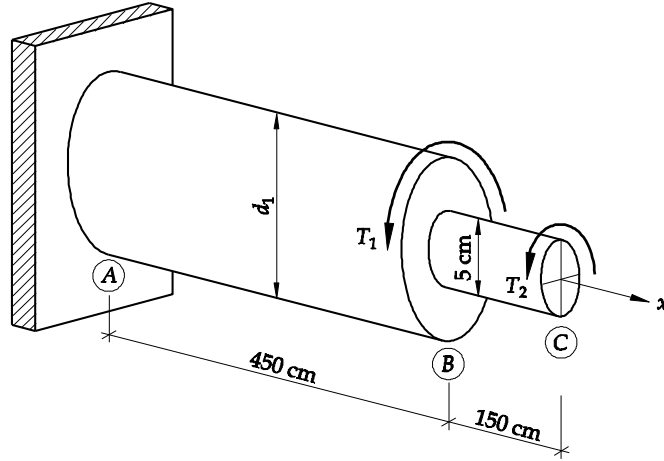
denklemini elde ederiz. İlgili değerleri ve (1) bağıntısında elde edilen σ_1 değerini (2) denkleminde yerine koyarsak,

$$\begin{aligned}A_1 &= \pi \left(\frac{d_1}{2} \right)^2 = 3,14 \times 10^2 = 314 \text{ mm}^2 \\ A_2 &= \pi \left(\frac{d_2}{2} \right)^2 - A_1 = 3,14 \times 20^2 - 314 = 942 \text{ mm}^2 \\ \sigma_1 &= -\sigma_2 \times \frac{A_2}{A_1} \rightarrow \sigma_1 = -\sigma_2 \times \frac{942}{314} \rightarrow \sigma_1 = -3\sigma_2 \quad \dots (1) \\ \alpha_1 \Delta t + \frac{\sigma_1}{E_1} &= \alpha_2 \Delta t + \frac{\sigma_2}{E_2} \\ (1,698 \times 10^{-5} \times 20) + \frac{-3\sigma_2}{1,12 \times 10^5} &= (2,38 \times 10^{-5} \times 20) + \frac{\sigma_2}{0,7 \times 10^5} \quad \dots (2) \\ -4,6\sigma_2 &= 15,28 \\ \sigma_2 &= -3,32 \text{ MPa} \\ \sigma_1 &= 9,96 \text{ MPa}\end{aligned}$$

gerilme değerleri elde edilir. Sonuçlar kesit üzerinde aşağıdaki şekilde gösterilir.

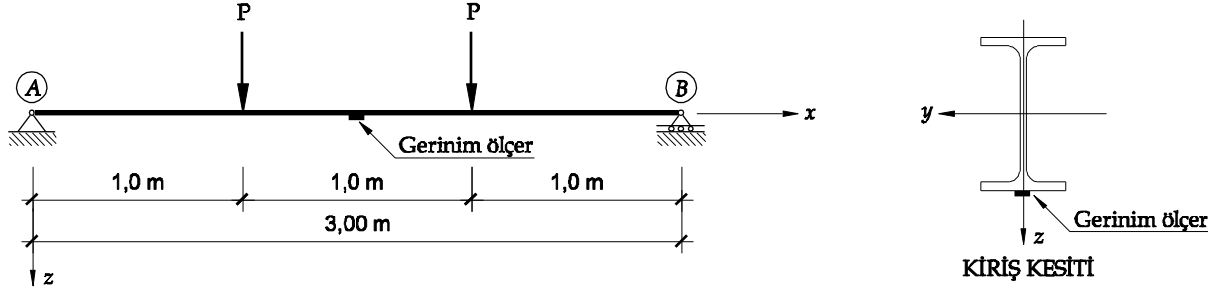
---- o ----

Örnek 10. Şekilde görülen 600 cm uzunluğundaki, çapı kademeli azalan çelik şaft, B ve C noktalarında sırasıyla, $T_1 = 2355 \text{ N}\cdot\text{m}$ ve $T_2 = 785 \text{ N}\cdot\text{m}$ burulma momentlerine maruzdur. A noktası ankastre bağlı olan şaftın, A ve B noktaları arasındaki çapı d_1 , B ve C noktaları arasındaki çapı da 5 cm'dir. Şaftı oluşturan malzemenin elastisite modülü $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$, kayma modülü $G = 8,4 \times 10^4 \text{ MPa}$ 'dır. Müsaade edilen en büyük kayma gerilmesi 40 MPa ve A noktasıyla C noktası arasındaki en büyük dönme açısı 3° olduğuna göre, emniyetli en küçük d_1 çapını belirleyiniz (Popov, 1979).

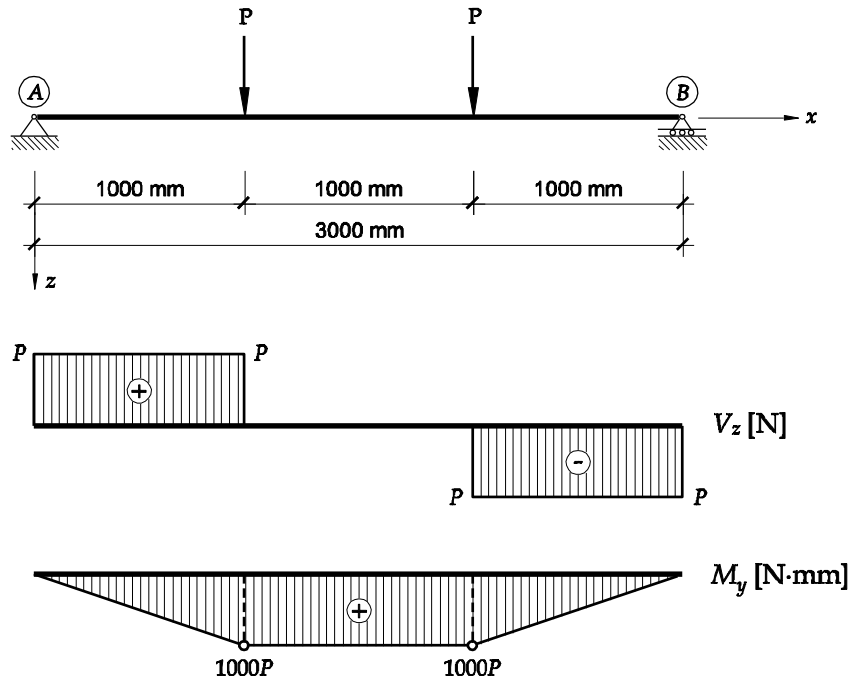


Çözüm 10. AC çubuğu...

Örnek 11. IPE 100 profilinden yapılmış bir basit kiriş şekilde görüldüğü gibi yüklenmiştir. Kirişte meydana gelen şekildeğiştirmeleri ölçmek için açıklığın ortasında kirişin alt başlığının en dış lifine bir gerinim ölçer yapıştırılmıştır. Uygulanan yükler altında meydana gelen şekildeğiştirme oranı $\varepsilon = 800 \times 10^{-6}$ olarak ölçülmüştür ve söz konusu değer lineer-elastik bölgede kalmaktadır. $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$, $I_y = 171 \times 10^4 \text{ mm}^4$, $W_y = 34,20 \times 10^3 \text{ mm}^3$, $A = 1032 \text{ mm}^2$ olduğuna göre kirişe uygulanan P yükünü belirleyiniz.



Çözüm 11. AB kirişinde meydana gelen kesit tesirleri dikkate alındığında gerinim ölçer sabit moment bölgesinde kalmaktadır ve eğilme momenti pozitifdir. Dolayısıyla verilen şekildeğiştirme oranı, alt başlıkta meydana gelen uzamayı göstermektedir.



Malzeme özellikleri bilindiğine göre en dış lifte meydana gelen normal gerilme değeri aşağıdaki bağıntı ile kolaylıkla hesaplanabilir.

$$\sigma_x = E \times \varepsilon_x = 0,0008 \times 200000 = 160 \text{ MPa}$$

Şekildeğiştirmenin lineer-elastik bölgede kaldığı ve düz eğilme altında söz konusu şekildeğiştirmeye denk gelen normal gerilme dağılımının da lineer olduğu bilindiğine göre M_y eğilme momenti aşağıdaki bağıntı ile hesap edilir.

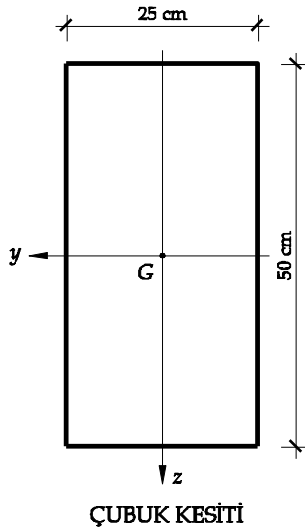
$$M_y = \sigma_x \times W_y = 160 \times 34,2 \times 10^3 = 5472 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Moment diyagramında elde edilen eğilme momenti değeri, bulunan eğilme momentine eşitlenerek kirişe etkiyen tekil yük hesaplanır.

$$1000P = M_y = 5472 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

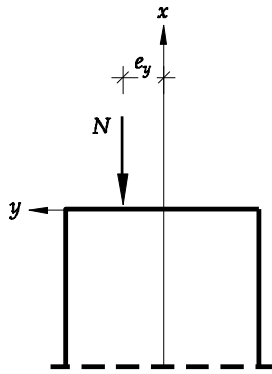
$$P = 5472 \text{ N}$$

---- o ----



Örnek 12. Şekilde görülen çubuk kesitine, y ekseninde bir dışmerkez basınç kuvveti etkimektedir. Kuvvetin şiddeti 1000kN olduğuna göre kesitte meydana gelecek normal gerilmelerin tek yönlü olabilmesi için kuvvetin ağırlık merkezinden en fazla ne kadar uzaklaşması gerektiğini belirleyiniz. Belirlediğiniz nokta için elde edilen gerilme dağılımını ve tarafsız eksenini şekil üzerinde gösteriniz.

Çözüm 12. Şekilde verilen kesite, aksenal kuvvetin dışmerkez etkimesi halinde oluşacak normal gerilme dağılımı üniform olmayacaktır. Normal kuvvetin tatbik noktasına göre normal gerilme dağılımı tek veya çift yönlü olarak meydana gelecektir. Soruda, gerilmelerin tek yönlü olması istendiği için tatbik noktasının çekirdek sınırı üzerinde veya içerisinde kalması gerekmektedir. Verilen kuvvet basınç kuvveti olduğu için kesitte meydana gelecek tek yönlü gerilmeler de basınç gerilmesi olacaktır. Dışmerkezlikten dolayı oluşan basınç gerilmelerinin çekmeye dönmeden, normal kuvveti uygulayabileceğimiz en uzak noktanın konumu da bize, çekirdek sınırında bulunmamız gerektiğini işaret etmektedir. Dışmerkez kuvvet y ekseninde bulunduğu için eğilme momenti z ekseninde meydana gelecektir ve kuvvetin çekirdek sınırında olduğu durumda tarafsız eksen de kesit sınırında bulunacaktır. Dolayısıyla, söz konusu durum için, tek eksenli eğilme altında, tatbik noktasının e_y mesafesi pozitif bölgede kabul edilirse, tarafsız eksen $y = -125 \text{ mm}$ konumunda z eksenine paralel olacaktır.



$$N = -1000 \text{ kN}$$

$$A_k = 250 \times 500 = 125 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

$$I_z = \frac{hb^3}{12} = \frac{500 \times 250^3}{12} = 651041,666 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$W_z = \frac{hb^2}{6} = \frac{500 \times 250^2}{6} = 5208,333 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_x \leq 0 \rightarrow e_{y,\max} = ?$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A_k} + \frac{N \times e_y}{I_z} y$$

tarafsız eksen $y = -125 \text{ mm}$ 'de bulunduğunda

$$\sigma_{x,\max} = 0 \text{ için } e_{y,\max} = ?$$

$$\frac{-1000 \times 10^3}{125 \times 10^3} + \frac{-1000 e_{y,\max} \times 10^3}{651041,666 \times 10^3} (-125) = 0$$

$$-8 + 0,192 e_{y,\max} = 0$$

$$e_{y,\max} = 41,66 \text{ mm}$$

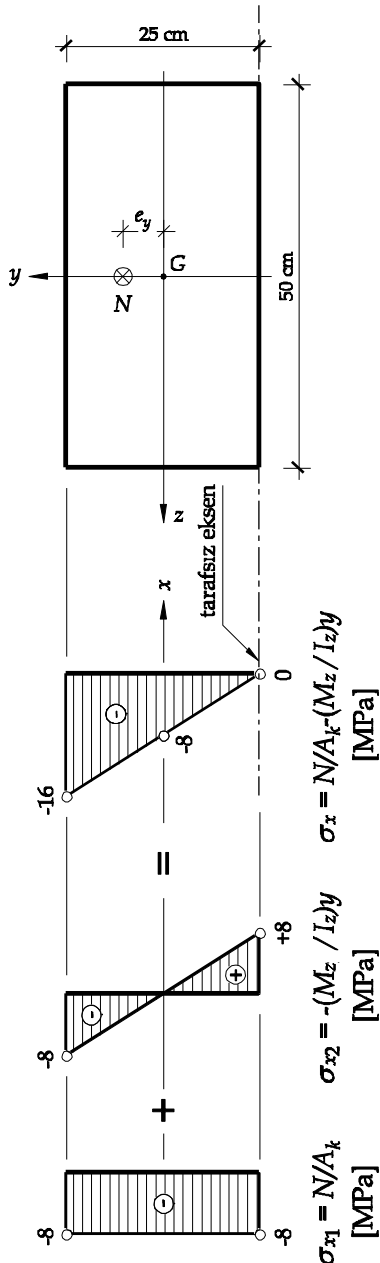
eksenel kuvvet $e_{y,\max} = 41,66 \text{ mm}$ 'de bulunduğunda

$$y = +125 \text{ mm için } \sigma_{x,\min} = ?$$

$$\sigma_{x,\min} = \frac{-1000 \times 10^3}{125 \times 10^3} + \frac{-1000 \times 41,66 \times 10^3}{651041,666 \times 10^3} (+125)$$

$$\sigma_{x,\min} = -16 \text{ MPa}$$

---- 0 ----



KAYNAKLAR:

- Egor P. Popov, 1979, *Introduction to Mechanics of Solids*, Prentice Hall, New Delhi, ISBN 0-87692-057-1.
- Hilmi Luş, Uğur Ersoy, Erdem Canbay, S Tanvir Wasti, 2013, *Çubukların Mukavemeti*, Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi, İstanbul, ISBN 978-605-4787-22-7.
- Mehmet Bakioğlu, 2007, *Statik Mukavemet*, Beta Yayınevi, İstanbul, ISBN 978-975-295-687-2.
- Mehmet H. Omurtag, 2011, *Mukavemet I-II*, Birsen Yayınevi, İstanbul, ISBN 975-511-431-9.
- Mustafa İnan, 2001, *Cisimlerin Mukavemeti*, İTÜ Vakfı, İstanbul, ISBN 975-7463-05-01.
- William A. Nash, 1972, *Cisimlerin Mukavemeti Problem Kitabı*, Çeviri: Esin Ergintan İnan, Ofset Matbaacılık, İstanbul.
- Yavuz Bilgen, 2006, *Mukavemet I-II Ders Notları*, İÜ İnşaat Mühendisliği Bölümü, İstanbul.